

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Andrej Horvat

**Modeliranje turbulentne naravne konvekcije
v kapljevini z notranjo generacijo toplote
z metodo velikih vrtincev**

DISERTACIJA

MENTOR: prof. dr. Jure Marn

Ljubljana, 2001

Zahvala

Doktorsko delo sem opravil na Odseku za reaktorsko tehniko Instituta "Jožef Stefan". Vsem sodelavcem odseka se zahvaljujem za pomoč in nasvete pri raziskovalnem delu. Še posebej se zahvaljujem mentorjema dr. I. Kljenaku in prof. dr. J. Marnu. Hvala prav tako mojim staršem, bratu Martinu in Fitri.

Modeliranje turbulentne naravne konvekcije v kapljevini z notranjo generacijo toplote z metodo velikih vrtincev

Ključne besede

- ◆ težke nesreče
- ◆ reaktorska posoda
- ◆ naravna konvekcija
- ◆ turbulenca
- ◆ numerična simulacija
- ◆ metoda simulacije velikih vrtincev

PACS 44.25.+f, 47.27.-i, 83.85.Pt, 83.10.Ff, 28.41.Ak

Povzetek

Najtežja oblika hipotetične težke nesreče v jedrski elektrarni je popolna raztalitev jedrske sredice. V tem primeru se talina nabere na dnu reaktorske posode, kjer raztaljuje jekleno steno. Toplota v talini se nadalje sprošča zaradi radioaktivnega razpada. Da bi preprečili pretalitev reaktorske posode, je potrebno zunanost spodnjega plenuma zadostno hladiti. Določitev potrebne intenzivnosti hlajenja oziroma potrebnega odvoda toplote zahteva poznavanje termodinamičnih procesov v talini.

Naravna konvekcija taline, kot posledica notranje generacije toplote, je najpomembnejši mehanizem prenosa toplote v talini. Zaradi visokih temperatur in snovskih lastnosti taline, je eksperimentalno spremljanje pojava praktično nemogoče. Skupni problem vseh numeričnih simulacij pa je intenzivno turbulentno obnašanje kapljevine pri visokih Rayleighovih številih.

Doktorsko delo je osredotočeno na modeliranje turbulentne naravne konvekcije v volumetrično greti kapljevini. Postavljen fizikalni model zajema pojav turbulence z modificirano metodo simulacije velikih vrtincev. Na osnovi fizikalnega modela je bil razvit numerični program, s katerim so bile opravljene časovno odvisne simulacije naravne konvekcije v dvodimenzionalni pravokotni kotanji pri Rayleighovih številih $Ra = 10^6$ - 10^{11} in pri Prandtlovem številu $Pr = 0.25$.

Rezultati simulacij razkrivajo dinamiko toka in prenosa toplote v kapljevini. Ugotovljeno je bilo, da je režim toka laminaren pri Rayleighovih številih $Ra < 10^8$. Režim toka postane turbulenten zaradi Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti ob zgornji steni in Kelvin-Helmholtzovih nestabilnosti ob vertikalnih stenah. Lokalno je prenos toplote najvišji v zgornjih kotih simulacijskega območja, pojav vertikalnih vdorov hladne kapljevine pa znižuje prenos toplote skozi zgornjo steno. Na osnovi izračunanih časovnih porazdelitev Nusseltovega števila je bil določen čas nastopa prve in druge bifurkacijske točke. Časovno-krajevno povprečene vrednosti Nusseltovega števila kažejo, da odvisnost Rayleighovega in Nusseltovega števila ni enakomerno linearna v \log_{10} - \log_{10} diagramu, ampak odraža spremembe tokovnega režima. Povprečen prenos toplote je najvišji na zgornji steni simuliranega območja. Ocenjeno je bilo, da zaradi naravne konvekcije 48 odstotkov toplotne energije obremenjuje stene spodnjega plenuma, ostanek pa se vrača nazaj v reaktorsko posodo.

Modeling of turbulent natural convection in a fluid with internal heat generation with the large-eddy simulation method

Keywords

- ◆ severe accidents
- ◆ reactor pressure vessel
- ◆ natural convection
- ◆ turbulence
- ◆ numerical simulation
- ◆ large-eddy simulation method

PACS 44.25.+f, 47.27.-i, 83.85.Pt, 83.10.Ff, 28.41.Ak

Abstract

The worst hypothetical accident scenario in the nuclear power station is the general meltdown. In this case the reactor core melts and accumulates in the lower plenum of the reactor vessel. Heat is further generated in a melt pool due to fission products decay. Because of the high temperature melt, the integrity of the lower plenum could be threatened unless a sufficient outside cooling exists. To determine needed intensity of the cooling e.g. heat removal, the prediction of melt thermodynamic processes is the crucial task.

Natural convection as a consequence of the internal heat generation is the most important heat transfer mechanism. Because of high temperatures and melt's material properties, the experimental tracking of the phenomenon is practically impossible. On the other hand, the common problem of all numerical simulations is an intense turbulent behavior of the fluid at high Rayleigh numbers.

Presented work is focused on modeling of turbulent natural convection in a volumetrically heated fluid, where turbulence is captured with the modified large-eddy simulation method. The numerical computer program was developed and used for time dependent simulations of natural convection in a two-dimensional rectangular cavity at the Rayleigh numbers $Ra = 10^6$ - 10^{11} and the Prandtl number $Pr = 0.25$.

The simulation results disclose the dynamics and heat transfer in the fluid. It has been established that the fluid flow is laminar for the Rayleigh numbers $Ra < 10^8$. The flow regime becomes turbulent as a consequence of the Rayleigh-Taylor instabilities at the top wall and the Kelvin-Helmholtz instabilities at the vertical walls. Locally the heat transfer is the highest in the upper corners of the simulation domain, whereas the appearance of vertical cold intrusions (thermals) reduces the heat transfer through the upper boundary. Based on the calculated Nusselt number time distributions, the time of the appearance for the first and the second bifurcation point was determined. The time-spatial averaged values of Nusselt number show, that the Rayleigh-Nusselt number dependence is not monotonically linear in the \log_{10} - \log_{10} diagram. Moreover, it reflects the flow regime changes. The average heat transfer is the highest on the top wall of the simulation domain. It was estimated that due to natural convection the 48 percents of the thermal energy load the lower plenum walls, whereas the rest returns back to the reactor vessel.

Kazalo

1. Uvod	1
2. Fizikalni model	14
2.1 Enačbe prenosa mase, gibalne količine in toplotne energije	14
2.2 Izpeljava enačb turbulentnega toka	16
2.3 Kaskadni prenos gibalne količine in toplotne energije	18
2.4 Skala gibanja kapljevine in turbulenca	20
2.5 Metoda simulacije velikih vrtincev	22
2.6 Geometrija simulacijskega območja	28
2.7 Začetni in robni pogoji ter njihov vpliv	29
3. Numerične metode	31
3.1 Izbira numerične mreže	31
3.2 Krajevna diskretizacija prenosnih enačb	32
3.3 Stabilnostna analiza diskretizacijskih shem	35
3.4 Časovna integracija	36
3.5 Testiranje numerične sheme na standardnih problemih	39
3.5.1 Tok v kotanji	40
3.5.2 Tok v kotanji z vertikalno greto steno	44
3.5.3 Tok v kotanji z gretim dnom	49
3.5.4 Horizontalna plast kapljevine z volumetričnim gretjem	53
4. Rezultati in razprava	57
4.1 Tokovni režimi	57
4.2 Lokalne porazdelitve časovno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila	71
4.3 Časovne porazdelitve krajevno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila	82
4.4 Časovno in krajevno povprečne vrednosti Nusseltovega števila	85
5. Zaključki	89
6. Literatura	91

Seznam slik

- Slika 1:* Geometriji spodnjega plenuma reaktorske posode in simulacijskega območja
- Slika 2:* Simulacijsko območje naravne konvekcije v kotanji velikosti 1:1
- Slika 3:* Prikaz razporeditve končnih volumnov zamaknjene numerične mreže
- Slika 4:* Struktura ciklov večmrežne metode
- Slika 5:* Simulacijsko območje prisilne konvekcije v kotanji velikosti 1:1
- Slika 6:* Vertikalni profil hitrosti v_x , $Re = 1000$, $x = 0.5$
- Slika 7:* Horizontalni profil hitrosti v_y , $Re = 1000$, $y = 0.5$
- Slika 8:* Vertikalni profil hitrosti v_x , $Re = 3600$, $x = 0.5$
- Slika 9:* Horizontalni profil hitrosti v_y , $Re = 3600$, $y = 0.5$
- Slika 10:* Vertikalni profil hitrosti v_x , $Re = 10000$, $x = 0.5$
- Slika 11:* Horizontalni profil hitrosti v_y , $Re = 10000$, $y = 0.5$
- Slika 12:* Simulacijsko območje naravne konvekcije v kotanji velikosti 1:1 z vertikalno greto steno
- Slika 13:* Horizontalni profil hitrosti v_y , $Pr = 1$, $Ra = 10^5$, $y = 0.5$
- Slika 14:* Horizontalni profil temperature h , $Pr = 1$, $Ra = 10^5$, $y = 0.5$
- Slika 15:* Horizontalni profil hitrosti v_y , $Pr = 1$, $Ra = 10^6$, $y = 0.5$
- Slika 16:* Horizontalni profil temperature h , $Pr = 1$, $Ra = 10^6$, $y = 0.5$
- Slika 17:* Horizontalni profil hitrosti v_y , $Pr = 1$, $Ra = 10^7$, $y = 0.5$
- Slika 18:* Horizontalni profil temperature h , $Pr = 1$, $Ra = 10^7$, $y = 0.5$
- Slika 19:* Simulacijsko območje naravne konvekcije v kotanji velikosti 1.5:1 z gretim dnom
- Slika 20:* Tokovno polje, $Pr = 0.71$, $Ra = 10^8$, $y = 0.5$ (Hanjalić in sodelavci [72])
- Slika 21:* Tokovno polje, $Pr = 0.71$, $Ra = 10^8$, $y = 0.5$, model simulacije velikih vrtincev
- Slika 22:* Vertikalni profil temperature h , $Pr = 0.71$, $Ra = 10^8$, $y = 0.5$
- Slika 23:* Simulacijsko območje naravne konvekcije v plasti kapljevine velikosti 5:1 z volumetrično generacijo toplote
- Slika 24:* Temperaturno polje h , $Pr = 7.0$, $Ra = 10^8$
- Slika 25:* Povprečni vertikalni profil temperature h , $Pr = 7.0$, $Ra = 5 \cdot 10^6$
- Slika 26:* Povprečni vertikalni profil temperature h , $Pr = 7.0$, $Ra = 10^7$
- Slika 27:* Povprečni vertikalni profil temperature h , $Pr = 7.0$, $Ra = 10^8$
- Slika 28:* Povprečni vertikalni profil temperature h , $Pr = 7.0$, $Ra = 10^9$

- Slika 29:* Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$
- Slika 30:* Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$
- Slika 31:* Polje turbulentne viskoznosti v_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$
- Slika 32:* Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$
- Slika 33:* Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$
- Slika 34:* Polje turbulentne viskoznosti v_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$
- Slika 35:* Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$
- Slika 36:* Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$
- Slika 37:* Polje turbulentne viskoznosti v_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$
- Slika 38:* Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$
- Slika 39:* Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$
- Slika 40:* Temperaturno polje v spodnjih kotih (Horvat in sodelavci [80])
- Slika 41:* Razvoj Rayleigh-Taylorjeve nestabilnosti (Horvat in sodelavci [80])
- Slika 42:* Pojav Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti (Horvat in sodelavci [80])
- Slika 43:* Polje turbulentne viskoznosti v_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$
- Slika 44:* Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$
- Slika 45:* Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$
- Slika 46:* Polje turbulentne viskoznosti v_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$
- Slika 47:* Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$
- Slika 48:* Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$
- Slika 49:* Nestabilno temperaturno polje ob spodnji steni (Horvat in sodelavci [80])
- Slika 50:* Polje turbulentne viskoznosti v_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$
- Slika 51:* Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$
- Slika 52:* Razporeditev Nusseltovega števila na navpični steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$
- Slika 53:* Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$
- Slika 54:* Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$
- Slika 55:* Razporeditev Nusseltovega števila na vertikalni steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$
- Slika 56:* Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$
- Slika 57:* Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$
- Slika 58:* Razporeditev Nusseltovega števila na vertikalni steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$
- Slika 59:* Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$
- Slika 60:* Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$

- Slika 61:* Razporeditev Nusseltovega števila na navpični steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$
- Slika 62:* Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$
- Slika 63:* Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$
- Slika 64:* Razporeditev Nusseltovega števila na navpični steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$
- Slika 65:* Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$
- Slika 66:* Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$
- Slika 67:* Razporeditev Nusseltovega števila na navpični steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$
- Slika 68:* Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$
- Slika 69:* Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$
- Slika 70:* Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$
- Slika 71:* Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$
- Slika 72:* Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$
- Slika 73:* Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$
- Slika 74:* Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$
- Slika 75:* Funkcijska odvisnost Nusseltovega števila od Rayleighovega števila na spodnji steni simulacijskega območja
- Slika 76:* Funkcijska odvisnost Nusseltovega števila od Rayleighovega števila na navpični steni simulacijskega območja
- Slika 77:* Funkcijska odvisnost Nusseltovega števila od Rayleighovega števila na zgornji steni simulacijskega območja

Seznam tabel

Tabela 1: Brezdimenzijski simulacijski čas

Seznam spremenljivk in oznak

Latinske črke

A	površina [m^2]
b	modificirani tlak [Pa]
c_p	specifična toplota [J/kgK]
C	oznaka konstant
f	$= \frac{1}{2}\langle h'h' \rangle$, polovica povprečenega produkta fluktuacij temperature [K^2]
F	$= \frac{1}{2}\langle h \rangle \langle h \rangle$, polovica produkta povprečenih temperatur [K^2]
g	gravitacijski pospešek [m/s^2]
G	krajevni filter v evklidskem prostoru
h	temperatura [K]
I	specifična generacija toplote [W/m^3]
k	$= \frac{1}{2}\langle v'_i v'_i \rangle$, kinetična energija fluktuacij hitrosti [m^2/s^2]
K	$= \frac{1}{2}\langle v_i \rangle \langle v_i \rangle$, kinetična energije povprečene hitrosti [m^2/s^2]
ℓ	Taylorjeva krajevna skala fluktuacij hitrosti [m], mešalna dolžina [m]
ℓ_h	Taylorjeva krajevna skala fluktuacij temperature [m]
L	geometrična skala sistema [m]
Nu	Nusseltovo število
p	tlak [Pa]
Pr	Prandtlovo število
q	gostota toplotnega toka [W/m^2]
Q	specifični toplotni tok [W/m^3]
r	radialna oddaljenost [m]
R	lokacija v prostoru [m]
Ra	Rayleighovo število
Re	Reynoldsovo število
s	tenzor deformacijskih fluktuacij hitrosti [s^{-1}]
S	tenzor deformacijskih povprečenih hitrosti [s^{-1}]
t	čas [s]
T	napetostni tenzor [kg/ms^2]
v	hitrost [m/s]
V	volumen [m^3]
x	lokacija računske točke končnega volumna U v smeri x -koordinatne osi
xI	lokacija računske točke končnega volumna M v smeri x -koordinatne osi
y	lokacija računske točke končnega volumna V v smeri y -koordinatne osi
yI	lokacija računske točke končnega volumna M v smeri y -koordinatne osi

Grške črke

β	temperaturna razteznost [K^{-1}]
γ	stranica končnega volumna
Γ	Fourierjeva transformiranka filtra G
δ	Diracova delta funkcija
Δ	razdalja med računskima točkama [m]
ε	viskozna disipacija turbulence
η	skala Kolmogorova [m]
θ	identifikator gradienta
κ	valovno število

λ	toplotna prevodnost [W/mK]
μ	dinamična viskoznost [kg/ms]
ν	kinematična viskoznost [m ² /s]
Π	tenzor produktov fluktuacij hitrosti [m ² /s ²]
ρ	gostota [kg/m ³]
τ	čas [s]
υ	toplotna difuzivnost [m ² /s]
φ	razmerje med najmanjšimi in največjimi strukturami toka, omejilnik
Φ	modificirani tlak [Pa]
ω	končni volumen
$\partial\omega$	rob končnega volumna
Ω	vektor produktov fluktuacij hitrosti in temperature [mK/s], simulacijsko področje
$\partial\Omega$	rob simulacijskega področja

Indeksi

0	skala sistema
b	oznaka meje končnega volumna
Df	difuzijski člen
i, j, k	komponente vektorja in tenzorja v prostoru
J	južna stranica končnega volumna
Kn	konvekcijski člen
M	oznaka vrste končnega volumna
n	nivo časovne integracije, pravokotna smer
$n+$	nivo časovne integracije
$n++$	nivo časovne integracije
$n+1$	nivo časovne integracije
res	ostanek veličine po krajevnem filtriranju
s	konstanta Smagorinskega
S	severna stranica končnega volumna
t	veličina modela turbulence
tDf	člen turbulentne difuzije
T	simulacijski čas
U	oznaka vrste končnega volumna
νD	Van Driestova konstanta
V	vzhodna stranica končnega volumna, oznaka končnega volumna
x	horizontalna os
y	horizontalna os v trirazsežnem prostoru, vertikalna os v dvorazsežnem prostoru
z	vertikalna os
Z	zahodna stranica končnega volumna

Simboli

∂_i	parcialni odvod po i -ti koordinatni osi
∂_t	parcialni odvod po spremenljivki t
\backslash	odstopanje od povprečene veličine
$\langle \rangle$	povprečena veličina
$-$	krajevno povprečena veličina

1. Uvod

Jedrska varnost je interdisciplinarna panoga, ki zahteva široko poznavanje stanj kompleksnih tehnoloških sistemov tako med normalnim kot med nezgodnim obratovanjem. V primeru jedrske elektrarne je eden od potrebnih kriterijev sprejemljivosti zagotovitev varne ustavitve v primeru projektne nezgode. Najhujša oblika projektne nezgode je dvojni zlom dotočne cevi primarnega tokokroga. Kriteriji sprejemljivosti so opisani v poglavju 50.46 Zveznih predpisov (CFR), ki jih uporablja Jedrska upravna komisija ZDA (US NRC) [1] in se uporabljajo tudi v Sloveniji.

Kljub temu, da je verjetnost nastopa nesreče, ki presega okvire projektne nezgod, zelo majhna ($<1/10^6$ reaktor-let), pa poskuša vse več raziskav ugotoviti, kako bi se posamezne komponente elektrarne obnašale ob morebitni težki nesreči. O težki nesreči govorimo takrat, ko pride zaradi odsotnosti hlajenja do pregrevanja in taljenja jedrske sredice. V splošnem zakonodaja še ne predpisuje obveznih varnostnih mej v primeru morebitne težke nesreče, vendar pa je Jedrska upravna komisija ZDA (US NRC) že izdala priporočilo [2] za izdelavo analiz poteka morebitne težke nesreče in njenih posledic za vsako posamezno jedrsko elektrarno. V Sloveniji je bilo to priporočilo privzeto [3].

Najtežja oblika težke nesreče je popolna raztalitev jedrske sredice. V tem primeru se talina nabere na dnu reaktorske posode, kjer se ohlaja in pri tem najeda ter raztaljuje jekleno steno. Generacija toplote, ki je posledica visoke vsebnosti radioaktivnih materialov, povzroči dodatno zviševanje temperature v talini.

V preteklosti je veljalo prepričanje, da bi v primeru težke nesreče prišlo do pretalitve reaktorske posode in prodiranja taline skozi betonski temelj elektrarne [4]. Zaradi tega razloga, strokovnjaki niso posvečali večje pozornosti ohranitvi taline jedrske sredice v reaktorski posodi s hlajenjem njenih sten. Šele dogodki ob nesrečah na Otoku treh milj (ZDA, 1979) in v Černobilu (Ukrajina, 1986) so ovrgli teorijo o prodiranju taline skozi betonski temelj reaktorja in osredotočili pozornost na zajetje taline v spodnjem plenumu reaktorske posode ter na njeno ohlajanje [5,6,7,8,9].

Talina v spodnjem plenumu se ohlaja s prevodom toplote skozi steno reaktorske posode in s toplotnim sevanjem v reaktorsko posodo. Da bi preprečili pretalitev reaktorske posode in varno zadržali radioaktivno talino v primarnem tokokrogu, je potrebno steno spodnjega plenuma dodatno hladiti [10,11,12,13]. Vprašanje, ki se postavlja, je: "Kakšno naj bo zadostno hlajenje, da bo ostala reaktorska posoda cela in radioaktivne snovi varno zadržane?"

Analize so pokazale, da je hlajenje spodnjega plenuma z vodo, v primeru lahkovodnih reaktorjev, najbolj učinkovit postopek [14]. Prestop toplote skozi steno in toplotna obremenitev stene reaktorske posode, pa sta odvisna od vrste fizikalnih in kemičnih procesov: uparjanja na zunanji steni spodnjega plenuma, strjevanja taline in tvorbe evtektikov, generacije toplote in naravne konvekcije v talini. Pregled problematike hlajenja spodnjega plenuma, ki sem ga opravil v okviru magistrskega dela [15], je pokazal, da je naravna konvekcija najpomembnejši mehanizem, ki uravnava prenos toplote v talini in odvod toplote skozi stene. Zato sem se v okviru doktorskega dela posvetil izključno problemu modeliranja naravne konvekcije v kapljevini z notranjo generacijo toplote.

V zgodnjih 70-ih letih je Kulacki s sodelavci [16,17,18] opravil pionirske raziskave na področju naravne konvekcije v tekočini z notranjo generacijo toplote, kjer je kot vir

volumetričnega gretja uporabil Jouleovo toploto. Ti eksperimenti, ki so bili predvsem namenjeni jedrski industriji, so bili osnova za določitev prenosa toplote skozi vodoravno plast kapljevine pri različnih toplotnih robnih pogojih.

Vzporedno so Jahn in Reineke [19] ter Steinberner in Reineke [20] eksperimentalno kot numerično preučevali naravno konvekcijo kapljevine grete z Joulovo toploto v pravokotni in polkrožni posodi. Interval preučevanega Rayleighovega števila je bil od $5 \cdot 10^5$ do $3 \cdot 10^{13}$ pri Prandtlovem številu 7.

Kasneje so Mayinger in sodelavci [21], prav tako pa tudi Asfia s sodelavci [22] ter Frantz in Dhir [23] opravili obsežne raziskave naravne konvekcije kapljevine z volumetrično generacijo toplote v pravokotni, valjni in polkrožni posodi. Kot delovni medij sta bila uporabljena voda in freon-113. Preučen je bil širok interval Rayleighovega števila od $8 \cdot 10^4$ do $1.1 \cdot 10^{14}$ pri razmeroma ozkem intervalu Prandtlovega števila od 6 do 8. Na osnovi teh meritev so bile določene odvisnosti med Rayleighovim, Prandtlovim in Nusseltovim številom.

Kljub velikim eksperimentalnim naporom, pa so ostala temeljna vprašanja prenosa toplote na steni reaktorske posode odprta. Potrebno je poudariti, da je, zaradi visokih temperatur ($\sim 3000\text{K}$) in do nedavnega slabo znanih kemičnih in fizikalnih lastnosti taline jedrske sredice, eksperimentalno praktično nemogoče doseči realistične pogoje težke nesreče. Snovske lastnosti taline jedrske sredice so bile raziskane in objavljene šele v zadnjih letih (Abalin in sodelavci [24]) v okviru projekta RASPLAV. Zaradi pomanjkljivih eksperimentalnih rezultatov je tako večina avtorjev (kot npr. Theofanous in sodelavci [14]) izpuščala vpliv Prandtlovega števila iz korelacij prenosa toplote.

Šele novejša numerična študija opravljena za nizke vrednosti Prandtlovega števila so potrdile vpliv Prandtlovega števila na prenos toplote na steni reaktorske posode. Tako so numerične simulacije Nourgalieva in sodelavcev [25] razkrile močan vpliv Prandtlovega števila na lokalno porazdelitev Nusseltovega števila. Simulacije so bile izvedene za Rayleighova števila od 10^6 do 10^{12} pri različnih vrednostih Prandtlovih števil (od 0.6 do 7). Ugotovili so, da je vpliv Prandtlovega števila majhen v področju prevladujočih konvekcijskih tokov in mnogo bolj pomemben v področju prevladujočih difuzijskih tokov. Prav tako se vpliv Prandtlovega števila na tokovni vzorec tekočine povečuje z naraščanjem Rayleighovega števila.

Verzicco in Camussi [26] sta prav tako preučevala vpliv Prandtlovega števila na dinamiko turbulentnega toka pri naravni konvekciji. Z izvajanjem numeričnih eksperimentov sta ugotovila, da je Nusseltovo število, v primeru, ko je Prandtlovo število večje od 0.35, odvisno le od Rayleighovega števila. Pri Prandtlovem številu manjšem od 0.35 pa je Nusseltovo število odvisno tako od Rayleighovega kot od Prandtlovega števila.

Skupni problem vseh numeričnih simulacij je turbulentno obnašanje tekočine pri visokih Rayleighovih številih. Kljub velikim analitičnim in numeričnim naporom, ta problem še ni bil v celoti rešen. Zaradi majhne skale gibanja kapljevine v turbulentnem režimu, je t.i. direktna simulacija gibanja kapljevine na krajevni skali reaktorske posode nemogoča. Število diskretizacijskih točk numerične mreže namreč določa velikost medtočkovne razdalje numeričnega modela. Ker velikost računalnika omejuje število uporabljenih računskih točk, je potrebno simulacijo gibanja kapljevine izvajati na nivoju, kjer je medtočkovna razdalja numerične mreže mnogo večja od najmanjše kinematične in termične skale toka. To pomeni, da je potrebno skale manjše od medmrežne razdalje zajeti v model turbulence.

Dinh in Nourgaliev [27] sta opravila pregled modelov turbulence v volumetrično greti kapljevini, pri čemer sta se osredotočila na različne k - ϵ modele in ločene modele Reynoldsovih napetosti (Reynolds Stress Models). Natančnejši preračuni so bili opravljeni le za pogoje eksperimenta CAPO (Kymäläinen in sodelavci [28]). Opisane simulacije so bile izvedene za dvorazsežno kotanjo eliptične oblike pri Rayleighovih številih od 10^6 do 10^{15} .

Kljub temu, da so bile izračunane vrednosti Nusseltovega števila le malo višje od eksperimentalno določenih, pa je numerična konsistenca izračunov zelo vprašljiva zaradi skromne gostote uporabljene numerične mreže.

Drugačen pristop je predstavil Sehgal s sodelavci [29]. Turbulentno naravno konvekcijo v plasti kapljevine pri Rayleighovem številu $1.4 \cdot 10^9$ so modelirali z metodo simulacije velikih vrtincev (Large-Eddy Simulation Model). Izračunane vrednosti Nusseltovega števila so pokazale dobro ujemanje z eksperimentalnimi podatki.

Predloženo doktorsko delo predstavlja prispevek k modeliranju turbulentne naravne konvekcije. Za razliko od večine komercialnih programov, ki za simulacijo podobnih termohidravličnih primerov uporabljajo metode, ki temeljijo na Reynoldsovem povprečenju, je bila v okviru doktorskega dela razvita in uporabljena metoda simulacije velikih vrtincev, ki temelji na krajevnem povprečenju termodinamičnih veličin toka. Na osnovi teoretičnega modela zgrajen numerični program je bil obsežno testiran na vrsti standardnih termohidravličnih primerov. Doseženi rezultati zbrani v poglavju 3 dokazujejo pravilnost izbranih modelov in upravičujejo uporabo enake metodologije pri simulaciji turbulentnih vzgonskih tokov v kapljevini z notranjo generacijo toplote.

Za podrobno analizo procesov v talini v spodnjem plenumu reaktorske posode so bile opravljene numerične simulacije toka v kotanji pod vplivom volumetričnega gretja kot posledice notranje generacije toplote. Simulacije so bile opravljene za Rayleighova števila $Ra = 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}, 10^{11}$ pri enotnem Prandtlovem številu $Pr = 0.25$. Višina Prandtlovega števila je bila določena na osnovi eksperimentalnih vrednosti Abalina in sodelavcev [24] in ustreza razmeram v spodnjem plenumu reaktorske posode ob težki nesreči. Dobljeni rezultati prikazujejo dinamiko toka kapljevine in prenosa toplote na stenah simulacijskega območja. Poleg tega, rezultati omogočajo napovedovanje toplotne obremenjenosti spodnjega plenuma v razmerah težke nesreče v jedrskem reaktorju, kar je tudi osrednje vprašanje predstavljenega doktorskega dela.

2. Fizikalni model

2.1 Enačbe prenosa mase, gibalne količine in toplotne energije

V splošnem je gibanje kapljevine pri naravni konvekciji mogoče zapisati z enačbami prenosa mase (1), gibalne količine (2) in toplotne energije (3).

$$\partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j) = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_j v_i) = -\partial_i p + \partial_j T_{ji} - \rho g \delta_{iz} \quad (2)$$

$$\partial_t (\rho c_p h) + \partial_j (\rho c_p v_j h) = -\partial_j q_j + I \quad (3)$$

kjer je T_{ji} strižni tenzor, q_j gostota toplotnega toka in I volumetrični toplotni izvor, snovske lastnosti pa so odvisne od temperature:

$$\rho = \rho(h), \quad \mu = \mu(h), \quad c_p = c_p(h), \quad \lambda = \lambda(h) . \quad (4)$$

Pri reševanju problema naravne konvekcije se enačbe (1), (2), (3) in (4) bistveno poenostavijo, če uporabimo naslednje predpostavke in poenostavitve za lastnosti kapljevine :

- ◆ *Newtonov zakon viskoznega tečenja,*
- ◆ *Fourierjev zakon prevoda toplote,* (5)
- ◆ *nestisljivost kapljevine,*
- ◆ *Boussinesqova aproksimacija vzgonskih sil,*
- ◆ *linearna temperaturna odvisnost gostote $\rho = \rho_0(1 - \beta_0 h)$,*
- ◆ *neodvisnost ostalih snovskih lastnosti od temperature,*
- ◆ *moč volumetričnega izvora toplote je konstantna $I = I_0$.*

Tako dobijo prenosne enačbe (1), (2) in (3) naslednjo obliko:

$$\partial_i v_i = 0 \quad (6)$$

$$\partial_t v_i + \partial_j (v_j v_i) = -\frac{1}{\rho_0} \partial_i b + \nu_0 \partial_j \partial_j v_i + \beta_0 h g \delta_{iz} \quad (7)$$

$$\partial_t h + \partial_j (v_j h) = \frac{\lambda_0}{c_{p0} \rho_0} \partial_j \partial_j h + \frac{I_0}{c_{p0} \rho_0} \quad (8)$$

kjer je $\partial_i b = \partial_i p + \rho_0 g \delta_{iz}$. Zaradi lažje medsebojne primerjave modelov naravne konvekcije so

enačbe največkrat prevedene v brezdimenzijsko obliko, kjer so kot skale uporabljene naslednje osnovne veličine:

$$\blacklozenj \text{ višina simuliranega območja : } L_0 \quad (9)$$

$$\blacklozenj \text{ snovske lastnosti v referenčni točki: } \nu_0, \lambda_0, c_{p0}, \rho_0, \beta_0 \quad (10)$$

$$\blacklozenj \text{ moč volumetričnega izvora toplote: } I_0 \quad (11)$$

V primeru volumetričnega gretja kapljevine je iz osnovnih skal dolžine, snovskih lastnosti in volumetrične generacije toplote mogoče izpeljati ostale skale sistema:

$$\blacklozenj \text{ toplotna difuzivnost: } \nu_0 = \frac{\lambda_0}{c_{p0}\rho_0} \quad (12)$$

$$\blacklozenj \text{ čas: } t_0 = \rho_0 c_{p0} \frac{L_0^2}{\lambda_0} \quad (13)$$

$$\blacklozenj \text{ hitrost: } v_0 = \frac{\nu_0}{L_0} = \frac{\lambda_0}{c_{p0}\rho_0 L_0} \quad (14)$$

$$\blacklozenj \text{ tlak: } b_0 = \rho_0 v_0^2 = \frac{\lambda_0^2}{\rho_0 L_0^2 c_{p0}^2} \quad (15)$$

$$\blacklozenj \text{ toplotni tok: } Q_0 = I_0 t_0 = I_0 \rho_0 c_{p0} \frac{L_0^2}{\lambda_0} \quad (16)$$

$$\blacklozenj \text{ temperatura: } h_0 = \frac{Q_0}{c_{p0}\rho_0} = \frac{I_0 t_0}{c_{p0}\rho_0} = I_0 \frac{L_0^2}{\lambda_0} \quad (17)$$

in brezdimenzijska števila:

$$\blacklozenj \text{ Prandtlovo število: } Pr = \frac{\nu_0}{\nu_0} = c_{p0}\rho_0 \frac{\nu_0}{\lambda_0} \quad (18)$$

$$\blacklozenj \text{ Rayleighovo število: } Ra = c_{p0}\rho_0 \frac{g \beta_0 h_0 L_0^3}{\lambda_0 \nu_0} \quad \text{oz.} \quad Ra = c_{p0}\rho_0 \frac{g \beta_0 I_0 L_0^5}{\lambda_0^2 \nu_0} \quad (19)$$

Prandtlovo število (18) podaja razmerje med difuzijo gibalne količine in toplote, Rayleighovo število (19) pa razmerje med konvekcijo gibalne količine zaradi vzgonskih sil in njeno difuzijo.

Z uporabo zgoraj navedenih skal dobimo brezdimenzijsko obliko enačb prenosa mase (20), gibalne količine (21) in toplotne energije (22),

$$\partial_i v_i = 0 \quad (20)$$

$$\partial_t v_i + \partial_j (v_j v_i) = -\partial_i b + Pr \partial_j \partial_j v_i + Ra Pr h \delta_{iz} \quad (21)$$

$$\partial_t h + \partial_j (v_j h) = \partial_j \partial_j h + 1 \quad (22)$$

kjer so sedaj hitrost v_i , tlak b in temperatura h brezdimenzijske veličine.

2.2 Izpeljava enačb turbulentnega toka

Osnovna karakteristika turbulentnega toka je različnost velikosti kinematičnih in toplotnih struktur, ki soobstajajo v toku. Medtem, ko lahko pri laminarnem toku pred prehodom v kaotično stanje izločimo največ 3 velikosti tokovnih struktur, ki imajo svojo lastno frekvenco in valovno dolžino (Decker [30]), pa je lahko razpon velikosti tokovnih struktur v turbulentnem toku širok več velikostnih razredov (Wilcox [31]). Tako so najmanjše strukture turbulentnega toka mnogo manjše kot strukture v laminarnem režimu toka.

Analitične in numerične tehnike za izračun turbulentnih tokov zahtevajo, da matematično orodje reševanja zajame, če ne že vse, pa vsaj večino struktur toka. Pri analitičnih tehnikah in spektralnih numeričnih metodah so matematična orodja vrste lastnih funkcij, pri numeričnih metodah, ki rešujejo sisteme enačb v evklidskem prostoru, pa so ta matematična orodja različne diskretizacijske tehnike. Zaradi majhnosti skal turbulentnega toka, je v večini inženirskih problemov nemogoče zajeti večino struktur toka. Da bi premagali to omejitev, se poslužujemo različnih tehnik dekompozicije fizikalnih veličin in povprečenja prenosnih enačb (1-3). V tem poglavju je opisan postopek izpeljave povprečenih enačb za obravnavo turbulentnega toka, kot ga je poleg drugih avtorjev predstavil tudi Hinze [32].

Ne glede na uporabljeni postopek povprečenja je mogoče trenutno hitrost v , tlak b in temperaturo h toka kapljevine razdeliti na povprečni del in ostanek, ki je v mnogih primerih imenovan tudi "fluktuacija":

$$v = \langle v \rangle + v' \quad (23)$$

$$b = \langle b \rangle + b' \quad (24)$$

$$h = \langle h \rangle + h' \quad (25)$$

Če v enačbe prenosa mase (6), gibalne količine (7) in toplotne energije (8) vstavimo razstavljene veličine (23-25) in enačbe nato povprečimo, dobimo enačbe prenosa povprečenih veličin:

$$\partial_i \langle v_i \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \partial_i v_i' = 0 \quad (26)$$

$$\partial_t \langle v_i \rangle + \partial_j (\langle v_j \rangle \langle v_i \rangle) = -\frac{1}{\rho_0} \partial_i \langle b \rangle + v_0 \partial_j \partial_j \langle v_i \rangle + \beta_0 \langle h \rangle g \delta_{iz} - \partial_j \Pi_{ji} \quad (27)$$

$$\partial_t \langle h \rangle + \partial_j (\langle v_j \rangle \langle h \rangle) = v_0 \partial_j \partial_j \langle h \rangle + \frac{I_0}{c_{p0} \rho_0} - \partial_j \Omega_j \quad (28)$$

kjer je Π_{ji} simetrični tenzor in Ω_j vektor:

$$\Pi_{ji} = \langle v_j v_i \rangle - \langle v_j \rangle \langle v_i \rangle \quad (29)$$

$$\Omega_j = \langle v_j h \rangle - \langle v_j \rangle \langle h \rangle \quad (30)$$

V primeru, ko za uporabljeno povprečenje ali filtriranje velja

$$\langle v'_j \langle v_i \rangle \rangle = \langle v'_i \langle v_j \rangle \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \langle v'_j \langle h \rangle \rangle = \langle h' \langle v_j \rangle \rangle = 0 \quad (31)$$

lahko enačbi (29) in (30) krajše zapišemo kot:

$$\Pi_{ji} = \langle v'_j v'_i \rangle \quad (32)$$

$$\Omega_i = \langle v'_i h' \rangle \quad (33)$$

Tako postavljen sistem enačb prenosa mase (26), gibalne količine (27) in toplotne energije (28) ni zaprt, saj so komponente tenzorja Π_{ji} in vektorja Ω_j neznanke. Določimo jih lahko tako, da izpeljemo iz enačbe prenosa gibalne količine (7) in iz njene povprečene oblike (27) enačbe prenosa komponent tenzorja Π_{ji} (34):

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi_{ji} + \langle v_k \rangle \partial_k \Pi_{ji} &= \quad (34) \\ &= -\partial_k \left(\frac{1}{\rho_0} \langle b' v'_i \rangle \delta_{jk} + \frac{1}{\rho_0} \langle b' v'_j \rangle \delta_{ik} + \boxed{\langle v'_i v'_j v'_k \rangle} - 2v_0 \langle v'_i s_{jk} \rangle - 2v_0 \langle v'_j s_{ik} \rangle \right) \\ &+ \frac{1}{\rho_0} \langle b' (\partial_j v'_i + \partial_i v'_j) \rangle \\ &- \Pi_{ik} \partial_k \langle v_j \rangle - \Pi_{jk} \partial_k \langle v_i \rangle - \beta_0 g \delta_{iz} \Omega_j \\ &- 2v_0 \langle s_{ik} \partial_k v'_j \rangle - 2v_0 \langle s_{jk} \partial_k v'_i \rangle \end{aligned}$$

Enako lahko iz enačb prenosa gibalne količine (7), toplotne energije (8) in iz njihovih povprečenih oblik (27-28) izpeljemo enačbe prenosa komponent vektorja Ω_j :

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega_j + \langle v_k \rangle \partial_k \Omega_j &= \quad (35) \\ &= -\partial_k \left(\frac{1}{\rho_0} \langle b' h' \rangle \delta_{ik} + \boxed{\langle v'_k v'_j h' \rangle} - v_0 \langle v'_j \partial_k h' \rangle - v_0 \langle v'_j \partial_k h' \rangle \right) \\ &- \langle v'_k v'_j \rangle \partial_k \langle h \rangle - \langle v'_k h' \rangle \partial_k \langle v_j \rangle + \beta_0 \langle h' h' \rangle g \delta_{iz} \\ &- v_0 \langle \partial_k v'_j \partial_k h' \rangle - v_0 \langle \partial_k v'_j \partial_k h' \rangle \end{aligned}$$

S črtkanim okvirjem so v zgornjih enačbah označena povprečja produktov 3 fluktuacij. Zaradi teh členov sistem enačb (26-28) in (34-35) ni zaključen kljub izpeljavi enačb prenosa komponent tenzorja Π_{ji} in komponent vektorja Ω_j . Po istem principu kot smo izpeljali enačbi (34) in (35) bi lahko izpeljali enačbe prenosa povprečij n -tega reda produktov fluktuacij, vendar bi se v vsaki enačbi nahajal člen produkta $n+1$ fluktuacij. To ima za posledico, da sistem prenosnih enačb ni nikoli zaključen. Predstavljeni problem se v literaturi imenuje "zapiralni problem" (closure problem). Da bi ga rešili, moramo na določenem nivoju vnesti v sistem enačb dodatno informacijo o toku v obliki modela za povprečje produkta $n+1$ fluktuacij.

Zgoraj opisan sistem redov oziroma nivoje prenosnih enačb ima svoje fizikalno ozadje, ki bo opisano v naslednjem poglavju.

2.3 Kaskadni prenos gibalne količine in toplotne energije

V turbulentnem režimu toka razpadajo velike kinematične in toplotne strukture v manjše, kar ima za posledico prenos kinetične in toplotne energije s struktur z manjšim valovnim številom na strukture z večjim valovnim številom. Tako lahko z uporabo povprečenja dinamiko kapljevine razdelimo glede na krajevno ali časovno skalo struktur na več nivojev ali kaskad. Glede na pogostost pojava posameznih velikosti struktur ločimo različne tokovne režime kapljevine: laminarni, prehodni in turbulentni režim toka.

Za prikaz toka kinetične in toplotne energije od največjih do najmanjših struktur toka uporabimo enak postopek dekompozicije (23-25) kot v poglavju 2.2. Z vstavitvijo razstavljenih veličin v enačbe prenosa mase (6), gibalne količine (7) in toplotne energije (8) in ponovnim povprečenjem dobimo enačbe prenosa povprečenih veličin:

$$\partial_i \langle v_i \rangle = 0 \quad \text{in} \quad \partial_i v'_i = 0 \quad (36)$$

$$\partial_i \langle v_i \rangle + \partial_j \langle \langle v_j \rangle \langle v_i \rangle \rangle = -\frac{1}{\rho_0} \partial_i \langle b \rangle + v_0 \partial_j \partial_j \langle v_i \rangle + \beta_0 \langle h \rangle g \delta_{iz} - \partial_j \Pi_{ji} \quad (37)$$

$$\partial_i \langle h \rangle + \partial_j \langle \langle v_j \rangle \langle h \rangle \rangle = v_0 \partial_j \partial_j \langle h \rangle + \frac{I_0}{c_{p0} \rho_0} - \partial_j \Omega_j \quad (38)$$

ki so bile prikazane že v poglavju 2.2.

Enačbo prenosa kinetične energije povprečne hitrosti $K = \frac{1}{2} \langle v_i \rangle \langle v_i \rangle$ (39) dobimo, če enačbo prenosa povprečne hitrosti (37) pomnožimo s povprečeno hitrostjo $\langle v_i \rangle$ in zapis nekoliko preuredimo:

$$\begin{aligned} \partial_i K + \langle v_j \rangle \partial_j K = & \quad (39) \\ = -\frac{1}{\rho_0} \partial_j \langle \langle b \rangle \langle v_i \rangle \delta_{ij} \rangle + v_0 \langle v_i \rangle \partial_j \partial_j \langle v_i \rangle + \beta_0 \langle v_i \rangle \langle h \rangle g \delta_{iz} - \partial_j \langle \langle v_i \rangle \Pi_{ji} \rangle + & \boxed{\Pi_{ji} \partial_j \langle v_i \rangle} \end{aligned}$$

Uokvirjeni člen v enačbi (39) predstavlja ponor kinetične energije K na nivoju kinematičnih makrostruktur toka oziroma prenos le-te na nivo mikrostruktur toka.

Na enak način iz enačbe prenosa povprečene toplotne energije (38) izpeljemo enačbo prenosa veličine $F = \frac{1}{2}\langle h \rangle \langle h \rangle$:

$$\begin{aligned} \partial_t F + \langle v_j \rangle \partial_j F &= \\ &= v_0 \partial_j \partial_j F + \frac{I_0 \langle h \rangle}{c_{p0} \rho_0} - \partial_j (\Omega_j \langle h \rangle) + \boxed{\Omega_j \partial_j \langle h \rangle} \end{aligned} \quad (40)$$

Analogno z enačbo prenosa kinetične energije povprečene hitrosti (39) predstavlja uokvirjeni člen v enačbi (40) ponor veličine F na nivoju toplotnih makrostruktur toka oziroma prenos le-te na nivo mikrostruktur toka.

Kot prikazuje enačba (39), se kinetična energija iz makrostruktur prenaša na mikrostrukture. Njeno vlogo na nivoju mikrostruktur zajema enačba prenosa kinetične energije fluktuacij hitrosti $k = \frac{1}{2}\langle v'_i v'_i \rangle$ (41). Le-to dobimo iz enačbe prenosa komponent tenzorja Π_{ji} (34), če je $j = i$.

$$\begin{aligned} \partial_t k + \langle v_k \rangle \partial_k k &= -\partial_k \left(\frac{1}{\rho_0} \langle b' v'_i \rangle \delta_{ik} + \frac{1}{2} \langle v'_i v'_i v'_k \rangle - 2v_0 \partial_k \langle v'_i s_{ik} \rangle \right) \\ &\quad - \Pi_{ik} \partial_k \langle v_i \rangle + \beta_0 g \delta_{iz} \Omega_i \\ &\quad - 2v_0 \langle s_{ji} s_{ij} \rangle \end{aligned} \quad (41)$$

Prvi člen na desni strani enačbe (41) je transportni člen, ki ne spreminja nivoja kinetične energije mikrostruktur v celotnem sistemu. Drugi in tretji člen, označena s črtkanim okvirjem, predstavljata izvor kinetične energije na nivoju mikrostruktur toka. Drugi člen predstavlja prenos kinetične energije z večjih struktur toka na manjše, medtem ko tretji člen opisuje izvor kinetične energije zaradi vzgonskih sil na nivoju mikrostruktur. S polno črto je obrobjen četrti člen, ki predstavlja ponor kinetične energije na nivoju mikrostruktur toka zaradi viskozne disipacije oziroma njeno pretvorbo v toploto (Pope [33]).

Analogijo enačbi prenosa kinetične energije fluktuacij k (41) predstavlja enačba prenosa veličine $f = \frac{1}{2}\langle h' \rangle \langle h' \rangle$ (42). Dobimo jo, če enačbo prenosa toplotne energije (8) pomnožimo s temperaturo h , jo nato povprečimo in od nje odštejemo enačbo (40).

$$\begin{aligned} \partial_t f + \langle v_k \rangle \partial_k f &= -\partial_k \left(\frac{1}{2} \langle v'_k h' h' \rangle - \frac{\lambda_0}{2c_{p0} \rho_0} \partial_k \langle h' h' \rangle \right) \\ &\quad - \Omega_k \partial_j \langle h \rangle \\ &\quad - v_0 \langle \partial_k h' \partial_k h' \rangle \end{aligned} \quad (42)$$

Podobno kot pri enačbi prenosa kinetične energije fluktuacij k (41) je tudi sedaj prvi člen na desni strani enačbe (42) transportni člen, ki ne spreminja nivoja veličine f v sistemu. Drugi člen, označen s črtkanim okvirjem, predstavlja prenos toplotne energije z večjih struktur toka na manjše in je enak uokvirjenemu členu v enačbi (40). S polno črto je obrobjen četrti člen, ki predstavlja ponor na nivoju mikrostruktur toka zaradi molekularne difuzije temperaturnih

fluktuacij.

V tem poglavju prikazano dekompozicijo fizikalnih veličin na nivo povprečenih vrednosti in fluktuacij bi lahko razširili na poljubno število nivojev. Tako bi podrobneje spremljali kaskadni pretok energije iz večjih struktur toka na manjše, kar pa bi bilo iz računskega stališča zelo potratno. Zaradi tega se moramo v veliki večini primerov omejiti na modele, ki upoštevajo pretok energije le med dvema kaskadama.

2.4 Skala gibanja kapljevine in turbulenca

Velikost najmanjših skal oziroma mikroskal toka kapljevine in z njimi povezanega prenosa toplote je ena od osnovnih informacij o dinamiki toka. To je velikost skale disipacije fizikalnih veličin (hitrosti, temperature) zaradi delovanja difuzijskih zakonov. Za zagotovitev konsistentnosti numerične simulacije morajo biti mikroskale modeliranih veličin večje ali vsaj enakega velikostnega reda kot medmrežna razdalja med dvema računskima točkama. V primeru, da tega kriterija ni mogoče izpolniti zaradi računalniških omejitev, je potrebno z dekompozicijo fizikalnih veličin (23-25) povečati velikost skal simuliranih fizikalnih polj, dodatne člene pa nadomestiti z empiričnimi modeli. V obeh primerih je poznavanje velikosti mikroskal toka kapljevine in prenosa toplote odločilno za uspešno simulacijo obnašanja sistema.

V primeru naravne konvekcije v kapljevini z notranjo generacijo toplote sem mikroskale hitrosti in temperature določil po postopku, ki ga je opisal Arpacı [34,35]. Kot začetno točko pri tej analizi lahko vzamemo enačbo prenosa kinetične energije fluktuacij k (41), ki se za homogeni stacionarni strižni tok (Hinze [36]) skrči v:

$$-\beta_0 g \delta_{iz} \Omega_i = -\Pi_{ik} \partial_k \langle v_i \rangle - 2\nu_0 \langle s_{ji} s_{ij} \rangle \quad (43)$$

pri čemer je na levi strani enačbe izvor turbulence zaradi vzgonskih sil P_B , na desni strani enačbe pa izvor turbulence zaradi strižnih sil in disipacija turbulence zaradi viskoznosti. Podobno se enačba za prenos večine f (42) skrči v:

$$-\Omega_k \partial_j \langle h \rangle = \nu_0 \langle \partial_k h' \partial_k h' \rangle \quad (44)$$

Širšo fizikalno razlago oblike enačb (43) in (44) sta podala Tennekes in Lumley [37,38].

Za določitev velikostnega razreda mikroskal sistema moramo enačbi (43) in (44) zapisati v obliki bilanc karakterističnih skal:

$$P_B \sim \frac{(v')^3}{L_0} + \nu_0 \frac{(v')^2}{\ell^2} \quad (45)$$

$$\nu_0 \frac{(h')^2}{L_0} \sim \nu_0 \frac{(h')^2}{\ell_h^2} \quad (46)$$

kjer je ℓ Taylorjeva skala fluktuacij hitrosti in ℓ_h Taylorjeva skala fluktuacij temperature.

Kot v večini primerov, bomo velikosti obeh integralnih skal enačili (47), saj so velikostne razlike nepomembne pri grobi oceni mikroskal gibalne količine in toplotne energije.

$$\ell_h \sim \ell \quad (47)$$

Iz bilančne enačbe temperaturnih fluktuacij (46) lahko izrazimo velikost turbulentnih fluktuacij hitrosti v' in jo nato vstavimo v bilančno enačbo turbulentne kinetične energije (45). Iz tako dobljene enačbe je mogoče izpostaviti mikroskalo temperature ℓ_h kot prikazuje enačba (48).

$$\ell_h^6 \sim \frac{L_0^2 v_0^2}{P_B} (v_0 + v_0) \quad (48)$$

Po vpeljavi Prandtlovega števila (18) in preureditvi dobi enačba (48) naslednjo obliko:

$$\ell_h \sim L_0^{1/3} \left(\frac{v_0^2 v_0}{P_B} \right)^{1/6} \left(\frac{1}{Pr} + 1 \right)^{1/6} \quad (49)$$

Na osnovi dimenzijske analize nadomestimo krajevni skali ℓ_h in L_0 z enotno skalo η_h . Na ta način se izraz (49) skrči v toplotno skalo Kolmogorova za vzgonski tok :

$$\eta_h \sim \left(\frac{v_0^2 v_0}{P_B} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{Pr} + 1 \right)^{1/4} \quad (50)$$

Za odstranitev P_B iz izraza (50) je potrebno izvor turbulence zaradi vzgona izraziti s pomočjo fluktuacij hitrosti in temperature, kot prikazuje enačba (43):

$$P_B = -\beta_0 g \delta_{iz} \Omega_i \sim \beta_0 g v' h' \quad (51)$$

Poiščimo sedaj še velikost fluktuacij hitrosti v' in temperature h' .

Za izotropni turbulentni tok velja, da je velikost fluktuacije hitrosti:

$$v' \sim \frac{v_0}{\eta_h} \quad (52)$$

Velikost fluktuacije temperature h' dobimo iz predpostavke, da je difuzijski prenos toplote na razdalji toplotne skale Kolmogorova η_h enak izvoru toplotne energije zaradi notranje generacije toplote v volumnu L^3 . Tako lahko zapišemo:

$$\lambda_0 \frac{h'}{\eta_h} L_0^2 \sim I_0 L_0^3 \quad (53)$$

in izpostavimo velikost fluktuacije temperature h' :

$$h' \sim \frac{\eta_h L_0}{\lambda_0} I_0 \quad (54)$$

Po vstavitvi izrazov (53) in (54) v izraz za izvor turbulence zaradi vzgona P_B (51) dobimo:

$$P_B \sim \beta_0 g \left(\frac{v_0}{\eta_h} \right) \left(\frac{\eta_h L_0}{\lambda_0} I_0 \right) \sim Ra \left(\frac{v_0^2 v_0}{L^4} \right) \quad (55)$$

in z vstavitvijo le-tega v izraz za toplotno skalo Kolmogorova (50):

$$\eta_h \sim L_0 \left(\frac{1 + Pr}{Pr Ra} \right)^{1/4} \quad (56)$$

Kinematično skalo toka kapljevine pa določimo s pomočjo izraza (57) v katerega vstavimo izraz za izvor turbulence zaradi vzgona P_B (55).

$$\eta \sim \left(\frac{v_0^3}{P_B} \right)^{1/4} \quad (57)$$

Na ta način dobimo:

$$\eta \sim L_0 \left(\frac{Pr^2}{Ra} \right)^{1/4} \quad (58)$$

Enačbi (56) in (58) podajata najmanjšo velikost toplotnih in kinematičnih struktur v turbulentnem toku kapljevine. Enake velikosti je tudi debelina toplotne difuzijske plasti ob izotermnih stenah, kjer kapljevina izmenjuje toplotno energijo z okolico, in debelina viskozne plasti, če na steni ni zdrsa.

2.5 Metoda simulacije velikih vrtincev

Omejene računalniške kapacitete, ki so bile na razpolago, so izključile možnost direktne simulacije turbulentnega toka brez uporabe povprečenih veličin in dodatnih modelov za povprečja produktov fluktuacij v enačbah (27) in (28). Zaradi tega se je bilo potrebno odločiti za uporabo ene izmed metod modeliranja turbulence. Izbral sem metodo simulacije velikih vrtincev (Large Eddy Simulation Method), ki jo je bilo potrebno za obravnavani problem spremeniti in dopolniti. V tem poglavju sta podana razvoj in opis metode simulacije velikih vrtincev uporabljene za modeliranje turbulentne naravne konvekcije v kapljevini z notranjo generacijo toplote.

Za razumevanje metode je potrebno najprej razložiti postopek povprečenja oziroma filtriranja, čemur smo se pri zapisu enačb prenosa povprečenih veličin (26-28) in enačb prenosa komponent tenzorja Π_{ji} ter vektorja Ω_j v poglavju 2.2 izognili. Kot je bilo že

omenjeno, lahko neodvisno od modelnega pristopa obravnave turbulence posamezne veličine razdelimo na povprečni oziroma filtrirani del in ostanek. Glede na način razdelitve ločimo Reynoldsov pristop s časovnim filtriranjem oziroma povprečenjem :

$$\langle h(r, \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau - t) h(r, t) dt \Rightarrow h(r, \tau) = \langle h(r, \tau) \rangle + h'(r, \tau) \quad (59)$$

in metodo simulacije velikih vrtincev s krajevnim filtriranjem oziroma povprečenjem :

$$\bar{h}(R, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(R - r) h(r, t) dr \Rightarrow h(R, t) = \bar{h}(R, t) + h^{res}(R, t) \quad (60)$$

Pri tem mora pri izbiri tako časovnega kot krajevnega filtra veljati :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} G(r) dr = 1 \quad (61)$$

Iz zgodovinskih razlogov se je ustalila praksa, da se za Reynoldsov pristop uporablja izraz "povprečenje", pri metodi simulacije velikih vrtincev pa izraz "filtriranje".

Razdelitev veličine na njen povprečni oziroma filtrirani del in ostanek, je odvisna od izbranega pristopa. Na splošno je mogoče za filtriranje spektra valovnih dolžin uporabiti različne oblike filtrov. Definirani so tako v evklidskem kot v spektralnem prostoru, pri čemer velja med filtri v obeh prostorih naslednja povezava:

$$\Gamma(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t) e^{i\kappa t} dt \quad \text{oz.} \quad \Gamma(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(r) e^{i\kappa r} dr \quad (62)$$

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\kappa) e^{-i\kappa t} d\kappa \quad \text{oz.} \quad G(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(\kappa) e^{-i\kappa r} d\kappa \quad (63)$$

Zapišimo sedaj različne oblike filtrov za časovno povprečenje in krajevno filtriranje v eni dimenziji:

- ♦ "top hat" filter (Reynoldsov pristop s časovnim povprečenjem)

$$G(\tau - t) = \begin{cases} 1/2\Delta t, & |\tau - t| \leq \Delta t \\ 0 & , |\tau - t| > \Delta t \end{cases} \quad \text{in} \quad \Gamma(\kappa) = \frac{\sin(\kappa 2\Delta t)}{(\kappa 2\Delta t)} \quad (64)$$

- ♦ "top hat" filter (Reynoldsov pristop s krajevnim filtriranjem)

$$G(R - r) = \begin{cases} 1/2\Delta r, & |R - r| \leq \Delta r \\ 0 & , |R - r| > \Delta r \end{cases} \quad \text{in} \quad \Gamma(\kappa) = \frac{\sin(\kappa 2\Delta r)}{(\kappa 2\Delta r)} \quad (65)$$

◆ Gaussov filter

$$G(R-r) = \sqrt{\left(\frac{6}{\pi(\Delta r)^2}\right)} \exp\left(-\frac{6(R-r)^2}{(\Delta r)^2}\right) \quad \text{in} \quad \Gamma(\kappa) = \exp\left(-\frac{\kappa^2 \Delta r^2}{6}\right) \quad (66)$$

◆ "cut-off" filter

$$G(R-x) = \frac{\sin(\pi(R-r))}{(\pi(R-r))} \quad \text{in} \quad \Gamma(\kappa) = \begin{cases} 1, & |\kappa| \leq \pi/\Delta r \\ 0, & |\kappa| > \pi/\Delta r \end{cases} \quad (67)$$

Medtem, ko se v primeru Reynoldsovega pristopa s časovnim filtrom uporablja le "top hat" filter, pa se v primeru metode simulacije velikih vrtincev enakovredno uporabljajo vsi trije filtri (Abbott in Basco [39]).

Nadalje za zgoraj navedene filtre veljajo nekatere specifične lastnosti. Tako za Reynoldsovo časovno filtriranje navaja Hinze [32] naslednje lastnosti:

$$\begin{aligned} \langle dh \rangle &= d\langle h \rangle & (68) \\ \langle h \rangle &= \langle \langle h \rangle + h' \rangle = \langle \langle h \rangle \rangle + \langle h' \rangle = \langle h \rangle \\ \langle \langle h_1 \rangle \langle h_2 \rangle \rangle &= \langle \langle h_1 \rangle \rangle \langle \langle h_2 \rangle \rangle = \langle h_1 \rangle \langle h_2 \rangle \\ \langle \langle h \rangle h' \rangle &= \langle \langle h \rangle \rangle \langle h' \rangle = \langle h \rangle \langle h' \rangle = 0 \\ \langle h_1 h_2 \rangle &= \langle (\langle h_1 \rangle + h_1') + (\langle h_2 \rangle + h_2') \rangle = \langle h_1 \rangle \langle h_2 \rangle + \langle h_1' h_2' \rangle \\ \langle C_1 h_1 + C_2 h_2 \rangle &= C_1 \langle h_1 \rangle + C_2 \langle h_2 \rangle \end{aligned}$$

ki v splošnem ne veljajo v primeru krajevnega filtriranja. Za vse tri oblike krajevnega filtriranja (65), (66) in (67) veljajo le naslednje lastnosti :

$$\begin{aligned} G(-r) &= G(r) & (69) \\ G(r) &\rightarrow 0, \text{ ko } |r| \rightarrow \infty \quad \text{tako, da je } \int_{-\infty}^{+\infty} G(r) r^n dr \text{ vedno določen za vsak } n \geq 0 \\ \overline{C_1 h_1 + C_2 h_2} &= C_1 \overline{h_1} + C_2 \overline{h_2} \end{aligned}$$

za "top-hat" filter pa poleg linearnosti operatorja filtriranja (69) še :

$$\overline{dh} = d\overline{h} \quad (70)$$

Za filtriranje fizikalne veličine po celotnem prostoru je potrebno veličino zaporedno filtrirati po posameznih koordinatnih oseh oziroma filtre preprosto pomnožiti med seboj (Madabhushi in Vanka [40]).

$$G(\omega) = \prod_{r_i} G(r_i) \quad (71)$$

Pri modeliranju problema turbulentne naravne konvekcije sem za osnovo izbral model simulacije velikih vrtincev s "top hat" filtrom (65). Po izvedbi postopka filtriranja dobijo enačbe prenosa brezdimenzijske mase (20), gibalne količine (21) in toplotne energije (22) naslednjo obliko:

$$\partial_i \bar{v}_i = 0 \quad \text{in} \quad \text{posledično} \quad \partial_i v_i^{res} = 0 \quad (72)$$

$$\partial_i \bar{v}_i + \partial_j (\bar{v}_j \bar{v}_i) = -\partial_i \bar{b} + Pr \partial_j \partial_j \bar{v}_i + Ra Pr \bar{h} \delta_{iz} - \partial_j \Pi_{ji} . \quad (73)$$

$$\partial_i \bar{h} + \partial_j (\bar{v}_j \bar{h}) = \partial_j \partial_j \bar{h} + 1 - \partial_j \Omega_j . \quad (74)$$

kjer je Π_{ji} simetrični tenzor, ki nastane zaradi nelinearnosti konvekcijskega člena enačbe prenosa gibalne količine (21), ker filtrirani produkt veličin ni enak produktu filtriranih veličin:

$$\Pi_{ji} = \overline{v_j v_i} - \bar{v}_j \bar{v}_i \quad \text{oz.} \quad \Pi_{ji} = \overline{\bar{v}_j \bar{v}_i} - \bar{v}_j \bar{v}_i + \overline{v_j^{res} v_i^{res}} + \overline{v_j^{res} \bar{v}_i} + \overline{v_j^{res} v_i^{res}} \quad (75)$$

Analogno je Ω_j vektor, ki nastane zaradi nelinearnosti konvekcijskega člena enačbe prenosa toplotne energije (22) :

$$\Omega_j = \overline{v_j h} - \bar{v}_j \bar{h} \quad \text{oz.} \quad \Omega_j = \overline{\bar{v}_j \bar{h}} - \bar{v}_j \bar{h} + \overline{v_j^{res} h^{res}} + \overline{v_j^{res} \bar{h}} + \overline{v_j^{res} h^{res}} \quad (76)$$

Pri simulaciji turbulentnega toka kapljevine je mogoče z numerično mrežo končne gostote simulirati le filtrirani del veličin, medtem ko je ostanek, ki ga mreža ne zajame, potrebno modelirati. Tako je z velikostjo razdalje med sosednjima računskima točkama numerične mreže izbrana širina spektra, ki ga je potrebno modelirati. Modeliranje turbulence pomeni izraziti spekter veličin toka z manjšo valovno dolžino od dvakratne mrežne razdalje s spektrom veličin toka z večjo valovno dolžino, ki je z numerično mrežo popolnoma določen. To vlogo ima v večini modelov turbulence Boussinesqova aproksimacije turbulentne viskoznosti ν_t .

Korelacijski tenzor ostankov hitrosti Π_{ji} deluje podobno kot napetostni tenzor, kjer je laminarna viskoznost ν_0 nadomeščena s turbulentno viskoznostjo ν_t . Zaradi zadovoljitve enačbe ohranitve mase je potrebno zapisati :

$$\Pi_{ji} - \frac{1}{3} \delta_{ji} \Pi_{kk} = -2\nu_t S_{ji} \quad (77)$$

kjer je S_{ji} tenzor deformacijskih povprečenih hitrosti. Enako postopamo v primeru enačbe prenosa toplotne energije (74), kjer deluje vektor ostankov hitrosti in temperature Ω_j kot gostota difuzijskega toplotnega toka, ki jo je mogoče aproksimirati z vpeljavo turbulentne toplotne difuzivnosti :

$$\Omega_j = -\nu_t \partial_j \bar{h} \quad (78)$$

Z vstavitvijo modelskih nastavkov za komponente tenzorja Π_{ji} in vektorja Ω_j v enačbi prenosa gibalne količine (73) in toplotne energije (74) in ob upoštevanju nestisljivosti kapljevine lahko

zapišemo :

$$\partial_i \bar{v}_i = 0 \quad (79)$$

$$\partial_t \bar{v}_i + \partial_j (\bar{v}_j \bar{v}_i) = -\frac{1}{\rho_0} \partial_i \Phi + Pr \partial_j \partial_j \bar{v}_i + Ra Pr \bar{h} \delta_{iz} + 2 \partial_j (v_t S_{ji}). \quad (80)$$

$$\partial_t \bar{h} + \partial_j (\bar{v}_j \bar{h}) = \partial_j \partial_j \bar{h} + 1 + \partial_j (v_t \partial_j \bar{h}) \quad (81)$$

pri čemer je v Φ sedaj zajeta še sled tenzorja Π_{ji} :

$$\Phi = \bar{b} + \frac{1}{3} \rho_0 \delta_{ji} \Pi_{kk} \quad (82)$$

Iz eksperimentalnih spoznanj, ki jih je opisal Hinze [41], sledi, da je turbulentna viskoznost izotropne turbulence primerljiva s turbulentno toplotno difuzivnostjo za celotni turbulentni spekter, njun odnos pa je blizu linearne odvisnosti:

$$v_t = v_t / Pr_t \quad (83)$$

kjer je Pr_t empirično izbrano turbulentno Prandtlovo število. Problem se sedaj skrči na modeliranje turbulentne viskoznosti v_t in določitev empirične konstante Pr_t . Enako poenostavitev odvisnosti turbulentne viskoznosti in turbulentne toplotne difuzivnosti je mogoče najti tudi pri drugih avtorjih (Eidson [42], Wong in Lilly [43], Bastiaans in sodelavci [44]). Z modelom (83) se prav tako izognemo dodatnemu modeliranju turbulentne toplotne difuzivnosti v_t .

Osnova modela simulacije velikih vrtnicev je predpostavka, da je turbulentna viskoznost v_t odvisna od najmanjše valovne dolžine, ki je še zajeta v filtriranem delu hitrosti, in od velikosti viskozne disipacije ε , ki je odgovorna za pretvorbo kinetične energije najmanjših struktur kapljevine v toploto (Germano [45]). Iz dimenzijske analize, če najmanjšo zajeto valovno dolžino nadomestimo z velikostjo uporabljenega "top-hat" filtra (65), tako sledi :

$$v_t \sim \Delta^{4/3} \varepsilon^{1/3} \quad (84)$$

Če predpostavimo, da z uporabljenim filtrom izločimo in združimo v modelirani ostanek le najmanjše strukture kapljevine, ki so izotropne in homogene v prostoru, potem lahko trdimo, da je na tem nivoju viskozna disipacija turbulentne kinetične energije ε enaka njenemu izvoru. Tako iz enačbe (41) z upoštevanjem skal sistema transportnih enačb (9-19) izpeljemo:

$$\varepsilon = -\Pi_{ik} \partial_k \langle v_i \rangle + Ra Pr \delta_{iz} \Omega_i \quad (85)$$

Enačba (85) je enaka enačbi (43), ki smo jo uporabili za izpeljavo najmanjše velikosti kinematičnih in toplotnih struktur toka, le da je sedaj v brezdimenzijski obliki.

Z vstavitvijo izraza (84) in z upoštevanjem modelskih nastavkov za komponente tenzorja Π_{ji} (77) in vektorja Ω_j (78) ter definicije turbulentnega Prandtlovega števila Pr_t (83) dobimo naslednji izraz za turbulentno viskoznost :

$$\nu_t = \ell^2 \left(2S_{ji}S_{ij} - \frac{Ra Pr}{Pr_t} \partial_j h \delta_{iz} \right)^{1/2} \quad (86)$$

kjer je t.i. mešalna dolžina ℓ sedaj odvisna od velikosti medtočkovne razdalje numerične mreže Δ in konstante Smagorinskega C_s :

$$\ell = C_s \Delta \quad (87)$$

Tako smo dobili zaprt sistem enačb (79-81), (83) in (86-87), pri čemer sta modela turbulentne viskoznosti ν_t (86) in turbulentne toplotne difuzivnosti ν_t (83) odvisna od dveh empirično določljivih konstant: konstante Smagorinskega C_s , ki lahko zajema vrednosti od 0.01-0.2 (Deardorff [46]) in konstante turbulentnega Prandtlovega števila Pr_t katerega vrednosti se gibljejo od 1/3-1/2 (Nieuwstadt [47]). Konkretna izbira vrednosti konstant C_s in Pr_t za, v okviru doktorskega dela, opravljene simulacije je opisana v 3. in 4. poglavju.

Opisani model turbulence ima tudi svoje pomanjkljivosti. Ker lahko zavzame izraz v oklepajih enačbe (86) tudi negativne vrednosti, kar bi imelo za posledico kompleksno vrednost turbulentne viskoznosti, ga je potrebno administrativno omejiti:

$$\nu_t = \ell^2 \left(\left\| 0, \left(2S_{ji}S_{ij} - \frac{Ra Pr}{Pr_t} \partial_j h \delta_{iz} \right) \right\|_{\infty} \right)^{1/2} \quad (88)$$

Prav tako je model preveč disipativen v laminarnem režimu in v viskozni plasti v bližini sten. Medtem, ko so v laminarnem režimu gradienti hitrosti in temperature majhni in je turbulentna viskoznost, ki je dodana simuliranemu sistemu, zanemarljiva, pa so gradienti največji ob stenah sistema, kjer kapljevina izmenjuje gibalno količino in toplotno energijo z okolico. Prikazani model turbulence je zato potrebno dopolniti z vpeljavo stenskih funkcij, ki znižajo višino izračunane turbulentne viskoznosti ν_t in turbulentne toplotne difuzivnosti ν_t .

Stenske funkcije v definicijo turbulentne viskoznosti (86) vpeljejo odvisnost od oddaljenosti stene. Tako sem v prikazanem modelu uporabil stenske funkcije, ki so jih za tok kapljevine v kanalu predlagali Piomelli [48] in Madabhushi in sodelavci [40]. Izraz (87) dobi sedaj obliko :

$$\ell = C_s \Delta \left(1 - \exp\left(-\left(r^+/C_{vD}\right)^3\right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (89)$$

kjer sta C_{vD} Van Driestova konstanta (=26) in r^+ brezdimenzijska oddaljenost od stene. Brezdimenzijska oddaljenost od stene je definirana s strižno napetostjo T_w na sami steni:

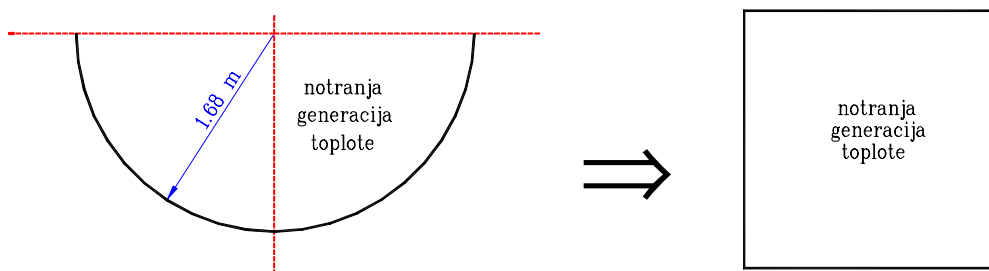
$$r^+ = \left(\frac{T_w}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{\nu_0} \quad \text{oz. v brezdimenzijskih veličinah} \quad r^+ = \left(\frac{\partial_n v}{Pr} \right)^{\frac{1}{2}} r \quad (90)$$

Predstavljeni model turbulence zaduši celotni spekter struktur toka, ki so manjše kot uporabljeni krajevni filter Δ in ne dovoljuje povratnega pretoka energije z manjših struktur na večje. To pomanjkljivost odpravlja t.i. dinamični model simulacije velikih vrtincev, ki so ga razvili Germano in sodelavci [49] in Lilly [50]. Dinamični model uporablja krajevno filtriranje na dveh različnih gostotah numeričnih mrež za izračun krajevno odvisne konstante C_s . Krajevno filtriranje fizikalnih veličin se izvaja eksplicitno pri vsakem časovnem koraku, kar ima za posledico, da je dinamična metoda simulacije velikih vrtincev enostavno uporabna samo na ekvidistančnih in strukturiranih numeričnih mrežah. To dejstvo zelo omejuje uporabo pri nizu inženirskih problemov.

Peng in Davidson [51] sta pri svojih izračunih vzgonskih tokov Rayleigh-Bénardove konvekcije prav tako uporabila dinamični model simulacije velikih vrtincev. Predlagala sta izboljšavo Eidsonove [42] formulacije turbulentne viskoznosti. Ker so njihove predpostavke o časovni skali turbulence, ki temeljijo na rezultatih direktnih numeričnih simulacij, v protislovju z enačbo prenosa kinetične energije k ostanka hitrosti (41), opisano inovacijo odklanjam in je nisem uporabil v predstavljenih simulacijah.

2.6 Geometrija simulacijskega območja

Numerične simulacije so bile izvedene v dvorazsežnem prostoru. Kotanjo kvadratne oblike (slika 1) sem izbral kot model spodnjega plenuma reaktorske posode zaradi podobnosti procesov naravne konvekcije v kotanjah pravokotne, sferične ali eliptične oblike, kar je razkrila primerjava eksperimentalnih rezultatov Asfie in Dhira [52] z rezultati numeričnih simulacij Nourgalieva in sodelavcev [25]. Pri tem je numerična izvedba modela naravne konvekcije v pravokotni kotanji zaradi kartezičnega koordinatnega sistema bistveno lažja kot v ostalih dveh omenjenih geometrijah. Primerjave Nourgalieva in sodelavcev [25] in Horvata in Kljenaka [53] so prav tako pokazale, da so najvišje vrednosti Nusseltovega števila lokalno podobno porazdeljene tako v kotanji kvadratne kot sferične oblike, ki imata podobne dimenzije. Pri tem so najvišje vrednosti Nusseltovega števila nekoliko nižje pri sferični geometriji. Večje razlike v prenosu toplote se pojavijo le v spodnjem delu zaradi nagle spremembe smeri toka in dodatnega vrtnčenja le-tega v kotih kvadratne kotanje.



Slika 1: Geometriji spodnjega plenuma reaktorske posode in simulacijskega območja.

Za omejitev simulacij na 2 dimenziji sem se odločil zaradi omejenih računalniških kapacitet, ki so bile na voljo. Poleg tega so eksperimentalni in numerični rezultati Nourgalieva in sodelavcev [25] in Dinha in Nourgalieva [27] nakazovali, da je cirkulacijski vzorec kapljevine v osnovi dvorazsežen. Zaradi dvomov v to domnevo so Wörner in sodelavci [54] izvedli direktne numerične simulacije plasti kapljevine z volumetričnim gretjem. Njihovi

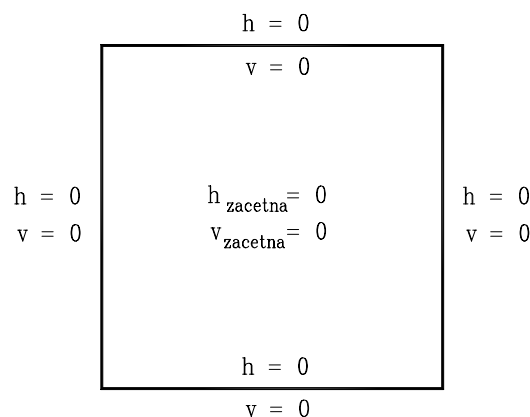
rezultati so pokazali, da sta temperaturno in inducirano hitrostno polje trirazsežni vendar periodični v horizontalni smeri s časovno odvisnimi vertikalnimi konvekcijskimi celicami nepravilnih oblik. Upoštevajoč periodičnost makrostruktur v horizontalni smeri, dvorazsežni numerični model zadovoljivo ujame značilnosti toka kapljevine z volumetričnim gretjem, kar dokazujejo tudi primerjave rezultatov z drugimi avtorji v 3. poglavju.

Model turbulentne viskoznosti ν_t (88) in turbulentne toplotne difuzivnosti ν_t (83), ki je bil predstavljen v poglavju 2.5, lahko izpeljemo po istem postopku iz prenosnih enačb (79-81) tako v dvorazsežnem kot v trirazsežnem prostoru. Odsotnost člena deformacije vrtincev pri dvorazsežnem modelu sicer pomembno spremeni pot kaskadnega procesa pretoka energije z večjih na manjše strukture toka, vendar ne predstavlja protislovja začetni predpostavki (85) o enakosti izvora turbulence in disipacije na nivoju tokovnih struktur manjših od filtra Δ . Mehanizem deformacije vrtincev je namreč odgovoren le za prenos turbulentne kinetične energije med posameznimi koordinatami v prostoru in ima zanemarljivo vlogo na nivoju modeliranih struktur toka, če je izbrani krajevni filter Δ dovolj majhen.

2.7 Začetni in robni pogoji ter njihov vpliv

Večina raziskovalcev (Theofanous in sodelavci [14], Suh [55]) predvideva, da se talina v spodnjem plenumu zaradi obilice vode strdi in ohladi na 400 do 600K. Šele ko vsa voda izpari, se material v spodnjem plenumu začne segrevati in taliti. Na osnovi teh fizikalnih opažanj je bilo predpostavljeno, da kapljevina na začetku simulacije v času $t = 0$ miruje. Tako sta bili obe komponenti začetnih hitrosti v_x in v_y postavljeni na vrednost 0 (slika 2).

Ker simulacije niso zajemale taljenja materiala, je bilo kot začetni pogoj simulacij izbrano izotermno stanje s povprečno brezdimenzijsko temperaturo 0 (slika 2). Tež vrednosti temperature so bile dodane naključne vrednosti v obliki šuma velikosti 10^{-6} . Mnogi raziskovalci (Grötzbach [56] ali Wörner in sodelavci [54]) so namreč opozarjali, da so lahko rešitve problemov naravne konvekcije močno odvisne od začetnih pogojev. Zato so predlagali dodajanje šuma začetnim vrednostim. Kljub mnogim opravljenim numeričnim simulacijam, teh opažanj ne morem potrditi. Dodani začetni šum namreč v nobenem od simuliranih problemov ni vplival na končni rezultat. To je verjetno posledica dejstva, da so bile v vseh primerih simulacije sprožene pri izotermnih začetnih pogojih, ko je toplotna difuzija najmočnejši mehanizem prenosa toplote.



Slika 2: Simulacijsko območje naravne konvekcije v kotanji velikosti 1:1.

Visoko tališče oksidnih komponent ($\sim 2800\text{K}$, Theofanous in sodelavci [14]), povzroči, da se talina obda s trdo skorjo. Zaradi tega sta bili, kot robna pogoja transportnih enačb (79-81), obe komponenti hitrosti v_x in v_y na meji simulacijskega področja postavljeni na vrednost 0 (slika 2), kar pomeni, da zdrs kapljevine na steni ni bil mogoč. Da bi ponazorili procese taljenja in strjevanja na stenah reaktorske posode, je bila robna vrednost temperature prav tako enaka $h = 0$.

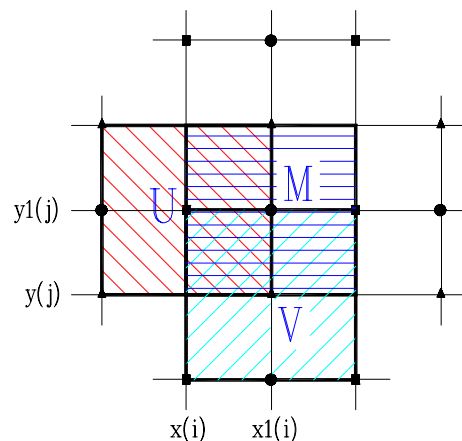
Prenos toplote v simulirani kotanji je še posebej občutljiv na temperaturne robne pogoje na zgornji steni, kot so pokazali Horvat in sodelavci [57]. Adiabatnost zgornje stene, ki so jo predlagali nekateri raziskovalci (Gabor in sodelavci [58]) namreč popolnoma spremeni cirkulacijski vzorec toka v kapljevini in doda toplotne obremenitve zgornje stene vertikalnim stenam.

3. Numerične metode

Pri obravnavanju problema naravne konvekcije v kapljevini z notranjo volumetrično generacijo toplote sem se omejil na dvorazsežne simulacije pojava. Iz tega razloga je nadaljnji prikaz izpeljave enačb in numeričnih metod omejen na dve koordinatni osi, x in y .

3.1 Izbira numerične mreže

Pri izgradnji numeričnega modela je bila uporabljena zamaknjena kartezična računsko mreža (Fletcher [59]). Osnovo mreže sestavljajo trije končni volumni, ki se delno prekrivajo (slika 3). V sredini vsakega končnega volumna je definirana numerična točka posamezne fizikalne veličine. V sredini osrednjega končnega volumna poimenovanega z M so definirane skalarne veličine (tlak Φ , temperatura h , turbulentna viskoznost ν_t in turbulentna toplotna difuzivnost ν_t), v sredini končnega volumna U je definirana hitrost v smeri x (v_x), in v sredini končnega volumna V hitrost v smeri y (v_y).



Slika 3: Prikaz razporeditve končnih volumnov zamaknjene numerične mreže.

Pri vseh izračunih naravne konvekcije kapljevine z notranjo generacijo toplote v kotanji je bila uporabljena numerična mreža s 128×128 računskimi točkami. Enotna numerična mreža z enakim številom računskih točk je bila izbrana, da bi bile izračunane in v poglavju 4 prikazane vrednosti turbulentne viskoznosti ν_t in turbulentne toplotne difuzivnosti ν_t neodvisne od medtočkovne razdalje numerične mreže oziroma od velikosti uporabljenega filtra Δ .

Ker se z naraščajočim Rayleighovim številom velikost najmanjših kinematičnih (58) in toplotnih struktur toka (56) zmanjšuje, je bilo potrebno numerično mrežo ob steni simulacijskega območja ustrezno zgostiti. Tako je bila uporabljena numerična mreža močno neekvidistančna.

Enačbi (91) in (92) podajata funkciji zgostitve v x in y smeri:

$$\Delta_x = \frac{L}{i_{max}} \left(\varphi + (1 - \varphi) \sin^2 \left(\pi \frac{i}{i_{Max}} \right) \right) \quad (91)$$

$$\Delta_y = \frac{L}{j_{max}} \left(\varphi + (1 - \varphi) \sin^2 \left(\pi \frac{j}{j_{Max}} \right) \right) \quad (92)$$

kjer je faktor φ definiran kot razmerje med najmanjšo velikostjo struktur toka in dimenzijo stranice simulacijskega območja:

$$\varphi = \frac{\min[\eta_h, \eta]}{L} \quad (93)$$

3.2 Krajevna diskretizacija prenosnih enačb

Za prostorsko diskretizacijo enačb prenosa mase (79), gibalne količine (80) in toplotne energije (81) sem uporabil metodo končnih volumnov, ki je nekoliko spremenjena oblika metode končnih razlik. Osnovna razlika med obema metodama je v zapisu fizikalnih veličin. Medtem, ko metoda končnih razlik obravnava enačbe (79-81) v njihovi diferencialni obliki, pa v primeru metode končnih volumnov prevedemo enačbe ohranitvenih zakonov v njihovo integralno obliko:

$$\int_{\partial\omega} \bar{v}_i dA_i = 0 \quad (94)$$

$$\partial_t \int_{\omega} \bar{v}_x dV + \int_{\partial\omega} (\bar{v}_j \bar{v}_x) dA_j = -\frac{1}{\rho_0} \int_{\partial\omega} \Phi dA_x + Pr \int_{\partial\omega} (\partial_j \bar{v}_x) dA_j + 2 \int_{\partial\omega} (v_i S_{jx}) dA_j. \quad (95)$$

$$\partial_t \int_{\omega} \bar{v}_y dV + \int_{\partial\omega} (\bar{v}_j \bar{v}_y) dA_j = \quad (96)$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \int_{\partial\omega} \Phi dA_y + Pr \int_{\partial\omega} (\partial_j \bar{v}_y) dA_j + Ra Pr \delta_{iy} \int_{\omega} \bar{h} dV + 2 \int_{\partial\omega} (v_i S_{jy}) dA_j$$

$$\partial_t \int_{\omega} \bar{h} dV + \int_{\partial\omega} (\bar{v}_j \bar{h}) dA_j = \int_{\partial\omega} (\partial_j \bar{h}) dA_j + \omega + \int_{\partial\omega} (v_i \partial_j \bar{h}) dA_j \quad (97)$$

Enačbe prenosa mase (94), gibalne količine (95-96) in toplotne energije (97) so zato obravnavane za vsak končni volumen posebej, gostote toka med celicami pa jasno določene. Več o metodi končnih volumnov je mogoče prebrati v delu Versteega in sodelavcev [60].

Pri diskretizaciji prenosne enačbe (94-97) zapisane v zveznem prostoru L_2 prevedemo v diskretno obliko v prostoru l_1 tako, da posamezne veličine integriramo po pripadajočih končnih volumnih M , U in V . Sedaj so enačbe (94-97) zapisane za poljubni končni volumen in

imajo sledečo obliko:

$$\sum_{b=S,J,V,Z} (\bar{v}\gamma)_b = 0 \quad (98)$$

$$\partial_t \bar{v}_x \omega_U + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Kn} \gamma)_b = - \sum_{b=V,Z} (\Phi \gamma)_b + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Df} \gamma)_b + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{tDf} \gamma)_b \quad (99)$$

$$\partial_t \bar{v}_y \omega_V + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Kn} \gamma)_b = - \sum_{b=S,J} (\Phi \gamma)_b + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Df} \gamma)_b + Ra Pr \bar{h} \omega_V + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{tDf} \gamma)_b \quad (100)$$

$$\partial_t \bar{h} \omega_M + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Kn} \gamma)_b = \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Df} \gamma)_b + \omega_M + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{tDf} \gamma)_b \quad (101)$$

kjer je γ vektor stranice pripadajočega končnega volumna M , U in V definiran kot $\gamma_b = n_b \Delta$. Z F so označene gostote toka skozi posamezne stranice γ , indeks pa označuje vrsto gostote toka: konvekcijsko gostoto toka (Kn), difuzijsko gostoto toka (Df) in turbulentno difuzijsko gostoto toka (tDf). Indeks b v enačbah (98-101) dodatno označuje severno (S), južno (J), vzhodno (V) in zahodno (Z) stranico ustreznega končnega volumna.

Diskretizacija konvekcijskih gostot toka F_{Kn} je bila v primeru enačb prenosa gibalne količine (99,100) izvedena po centralno-simetrični shemi, kot to prikazuje primer konvekcijske gostote toka gibalne količine na zahodni steni končnega volumna V :

$$(F_{Kn})_{b=Z} = \bar{v}_x(x,y) \bar{v}_y(x,y) \quad (102)$$

Nasprotno pa so bile konvekcijske gostote toka enačbe prenosa toplotne energije (101) diskretizirane po shemi visoke resolucije, ko jo je definiral LeVeque [61]. Shema visoke resolucije je bila pri simulaciji temperaturnega polja nujna zaradi velikih gradientov, ki se pojavljajo med simulacijo. Osnovna ideja te numerične sheme je kombinacija privetrne sheme in sheme Lax-Wendroff kot kaže primer diskretizacije konvekcijske gostote toka na zahodni steni končnega volumna M :

$$(F_{Kn})_{b=Z} = (1 - \phi)_{b=Z} (F_{Kn})_{b=Z,priveterna} + (\phi)_{b=Z} (F_{Kn})_{b=Z,Lax-Wendroff} \quad (103)$$

pri čemer je ϕ označen omejitnik (limiter), ki v primeru velikih gradientov temperature prenaša izračun konvekcijske gostote toka na privetrno shemo, v primeru nizkih gradientov pa na shemo Lax-Wendroff. Privetrna diskretizacijska shema gostote toka je nadalje podana z enačbo (104):

$$(F_{Kn})_{b=Z,priveterna} = v_x^+(x,y1)h(x-\Delta_x,y1) + v_x^-(x,y1)h(x+\Delta_x,y1) \quad (104)$$

pri čemer sta konvekcijski hitrosti v_x^+ in v_x^- :

$$v_x^+(x,y1) = \frac{1}{2}(v_x(x,y1) + |v_x(x,y1)|) \quad , \quad v_x^-(x,y1) = \frac{1}{2}(v_x(x,y1) - |v_x(x,y1)|) \quad (105)$$

in gostota toka po shema Lax-Wendroff z enačbo (106):

$$(F_{Kn})_{b=Z,priveterna} = v_x(x,y1) \left(h(x,y1) - \frac{1}{2} \Delta_t \left(\begin{array}{l} \partial_x (v_x(x,y1)h(x,y1)) \\ + \partial_y (v_y(x,y1)h(x,y1)) \end{array} \right) \right) \quad (106)$$

Pri konstrukciji sheme visoke resolucije je bil uporabljen t.i. "superbee" omejitnik, ki ga določa naslednja enačba:

$$\phi = \max[0, \min[1, 2\theta], \min[\theta, 2]] \quad (107)$$

Spremenljivka θ ima pri tem vlogo identifikatorja velikosti gradienta in je definirana kot:

$$\theta = \frac{h(x1,y1) - h(x1 - \Delta_x, y1)}{h(x + \Delta_x, y1) - h(x, y1)}, \text{ če je } v_x > 0 \quad (108)$$

$$\theta = \frac{h(x1 + \Delta_x, y1) - h(x1, y1)}{h(x + \Delta_x, y1) - h(x, y1)}, \text{ če je } v_x < 0 \quad (109)$$

V nasprotju s konvekcijskimi gostotami toka sta bila tlačna člena enačb prenosa gibalne količine (99,100) diskretizirana po enotni centralno-simetrični shemi. Prav tako so bile centralno-simetrično diskretizirane tudi difuzijske gostote toka prenosnih enačb (99-101). Prikazan primer (110) se nanaša na diskretizacijo difuzijske gostote toka gibalne količine na zahodni steni končnega volumna V :

$$(F_{Df})_{b=Z} = Pr \left(\frac{\bar{v}_y(x,y) - \bar{v}_y(x - \Delta_x, y)}{\Delta_x} \right) \quad (110)$$

Centralno-simetrična shema je bila izbrana, ker je difuzija simetričen proces. Kljub le prvemu redu natančnosti diskretizacije difuzijske gostote toka pa le-to ne vpliva na natančnost, saj velika večina napake izvira iz diskretizacijskih postopkov konvekcijskih gostot toka (102,103).

Centralno-simetrična diskretizacija je bila uporabljena tudi pri diskretizaciji gostot toka turbulentne difuzije. Podana sta primera za diskretizacijo gostote toka turbulentne difuzije gibalne količine na zahodni steni končnega volumna V :

$$(F_{idf})_{b=Z} = v_t(x,y) \left(\frac{\bar{v}_y(x,y) - \bar{v}_y(x - \Delta_x, y)}{\Delta_x} + \frac{\bar{v}_x(x,y) - \bar{v}_x(x, y - \Delta_y)}{\Delta_y} \right) \quad (111)$$

in za diskretizacijo gostote toka turbulentne difuzije toplotne energije na zahodni steni končnega volumna M :

$$(F_{idf})_{b=Z} = v_t(x,y) \left(\frac{\bar{h}(x,y) - \bar{h}(x - \Delta_x, y)}{\Delta_x} \right) \quad (112)$$

Zaradi krajevne in časovne odvisnosti turbulentne viskoznosti ν_t in turbulentne toplotne difuzivnosti ν_t , se sistem enačb obnaša podobno kot pri simulaciji nenevtonske kapljevine.

3.3 Stabilnostna analiza diskretizacijskih shem

Stabilno časovno integracijo enačb prenosa gibalne količine (99,100) in toplotne energije (101) je mogoče zagotoviti le z določitvijo ustrezne velikosti časovnega koraka Δ_t . Le-ta je bil določen na osnovi stabilnostnih pogojev izvirajočih iz Von Neumannove analize uporabljenih konvekcijsko-difuzijskih numeričnih shem. Volumetrični členi, kot npr. člen vzgonske sile, zaradi linearnosti na stabilnost časovne integracije ne vplivajo. Podrobnejši potek Von Neumannove analize so podali Hindmarsh in sodelavci [62].

Za centralno-simetrično shemo diskretizacije konvekcijskih (102) in difuzijskih (110) gostot toka enačb prenosa gibalne količine (99,100) sta bila uporabljena naslednja stabilnostna pogoja:

$$\Delta_t \left[2(Pr + \nu_t) \left(\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2} \right) \right] \leq 0.5 \quad (113)$$

$$\Delta_t \left[\frac{\bar{v}_x^2}{(Pr + \nu_t)} + \frac{\bar{v}_y^2}{(Pr + \nu_t)} \right] \leq 1 \quad (114)$$

Stabilnostni pogoj (113) omejuje vpliv difuzije, stabilnostni pogoj (114) pa razmerje med konvekcijo in difuzijo v enem časovnem koraku.

Ker je shema visoke resolucije, ki je bila uporabljena za diskretizacijo konvekcijskih gostot toka (103) enačbe prenosa toplotne energije (101) sestavljena iz privetrne sheme (104) in sheme Lax-Wendroff (106), je bilo potrebno stabilnostne pogoje določiti za vsako od obeh shem. Tako sta bila za privetrno diskretizacijo konvekcijskih gostot toka (103) in centralno-simetrično diskretizacijo difuzijskih gostot toka (110) izpeljana kriterija:

$$\Delta_t \left[\frac{|\bar{v}_x|}{\Delta_x} + \frac{|\bar{v}_y|}{\Delta_y} + 2(Pr + \nu_t) \left(\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2} \right) \right] \leq 0.5 \quad (115)$$

$$\Delta_t \left[\frac{\bar{v}_x^2}{|\bar{v}_x| \Delta_x + (Pr + \nu_t)} + \frac{\bar{v}_y^2}{|\bar{v}_y| \Delta_y + (Pr + \nu_t)} \right] \leq 1 \quad (116)$$

za diskretizacijsko shemo Lax-Wendroff konvekcijskih gostot toka (106) in centralno-simetrično diskretizacijo difuzijskih gostot toka (110) pa je bilo mogoče določiti le naslednji kriterij:

$$\Delta_t \left[\left(\frac{v_x^2}{\Delta_x^2} + \frac{v_y^2}{\Delta_y^2} \right) \Delta_t + 2(Pr + \nu_t) \left(\frac{1}{\Delta_x^2} + \frac{1}{\Delta_y^2} \right) \right] \leq 0.5 \quad (117)$$

Ker se časovni korak Δ_t v stabilnostnem pogoju (117) ne da izraziti eksplicitno, je bil uporabljen časovni korak prejšnjega $n-1$ iteracijskega cikla. Da bi dobili najkonservativnejšo velikost časovnega koraka Δ_t , so bile za medtočkovne razdalje Δ_x in Δ_y izbrane najnižje vrednosti neekvidistančne numerične mreže.

Enake stabilnostne omejitve časovnega koraka Δ_t (113-117) so bile izpeljane za vse 3 prenosne enačbe (99-101). Medtem, ko so kriteriji enaki za enačbi prenosa gibalne količine v x in y smeri (99,100), pa je potrebno v primeru stabilnostne analize enačbe prenosa toplotne energije (101) nadomestiti brezdimenzijsko viskoznost (Prandtlovo število) z brezdimenzijsko toplotno difuzivnostjo (vrednost 1), turbulentno viskoznost ν_t pa s turbulentno toplotno difuzivnostjo ν_t .

Med numeričnimi simulacijami so bili stabilnostni kriteriji (103-107) izračunani pri vsakem iteracijskem ciklu, časovni korak Δ_t uporabljen za integracijo v trenutnem iteracijskem ciklu pa je moral zadostiti vsem 5 stabilnostnim pogojem.

3.4 Časovna integracija

V želji po čim hitrejši časovni integraciji prenosnih enačb (99-101) in istočasni zadovoljitvi stabilnostnih pogojev podanih v poglavju 3.3, je bila časovna integracija enačb (99-101) izvedena večstopenjsko.

Najprej je bila izračunana sprememba obeh komponent hitrosti v_x in v_y zaradi konvekcijskih tlačnih in volumetričnih členov po enostopenjski Eulerjevi shemi:

$$\bar{v}_x^{n+1}(x, y) = \bar{v}_x^n(x, y) + \frac{\Delta_t}{\omega_U} \left(- \sum_{b=S, J, V, Z} (F_{Kn}^n \gamma)_b - \sum_{b=V, Z} (\Phi^n \gamma)_b \right) \quad (118)$$

$$\bar{v}_y^{n+1}(x, y) = \bar{v}_y^n(x, y) + \frac{\Delta_t}{\omega_V} \left(RaPr\bar{h}^n \omega_V - \sum_{b=S, J, V, Z} (F_{Kn}^n \gamma)_b - \sum_{b=S, J} (\Phi^n \gamma)_b \right) \quad (119)$$

Enak postopek je bil uporabljen tudi za spremembo temperature h v enačbi prenosa toplotne energije (101):

$$\bar{h}^{n+1}(x, y) = \bar{h}^n(x, y) + \frac{\Delta_t}{\omega_M} \left(\omega_M - \sum_{b=S, J, V, Z} (F_{Kn}^n \gamma)_b \right) \quad (120)$$

Pri simulacijah je bilo opaženo, da difuzijski členi, še posebej pa nelinearnost členov turbulentne difuzije, najbolj omejujejo velikost časovnega koraka Δ_t in s tem hitrost simulacije. Tako je bila za zagotovitev stabilnosti nujna uporaba implicitne sheme. Druga stopnja časovne integracije enačb prenosa gibalne količine (99,100) je bila tako izvedena s pol-implicitno metodo Cranck-Nicholson, ki ima naslednjo obliko:

$$\bar{v}_x^{n++}(x, y1) = \bar{v}_x^{n+}(x, y1) + 0.5 \frac{\Delta_t}{\omega_U} \left[\left(\sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Df}^n \gamma)_b + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{idf}^n \gamma)_b \right) + \left(\sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Df}^{n++} \gamma)_b + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{idf}^{n++} \gamma)_b \right) \right] \quad (121)$$

$$\bar{v}_y^{n++}(x1, y) = \bar{v}_y^{n+}(x1, y) + 0.5 \frac{\Delta_t}{\omega_V} \left[\left(\sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Df}^n \gamma)_b + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{idf}^n \gamma)_b \right) + \left(\sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Df}^{n++} \gamma)_b + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{idf}^{n++} \gamma)_b \right) \right] \quad (122)$$

Na enak način je bila izvedena druga stopnja časovne integracije za enačbo prenosa toplotne energije (101):

$$\bar{h}^{n+1}(x1, y1) = \bar{h}^{n+}(x1, y1) + 0.5 \frac{\Delta_t}{\omega_M} \left[\left(\sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Df}^n \gamma)_b + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{idf}^n \gamma)_b \right) + \left(\sum_{b=S,J,V,Z} (F_{Df}^{n+1} \gamma)_b + \sum_{b=S,J,V,Z} (F_{idf}^{n+1} \gamma)_b \right) \right] \quad (123)$$

kjer je h^{n+1} že vrednost temperature pri novem $n+1$ časovnem koraku. Iteracijski postopek za pridobitev vrednosti v_x^{n++} , v_y^{n++} in h^{n+1} je bil izveden z Gauss-Seidlovo relaksacijsko metodo, ki jo je podrobno opisal Hirsch [63]. Uporaba predstavljene pol-implicitne sheme je omogočila povečanje časovnega koraka Δ_t ob ohranitvi stabilnosti časovne integracije. Tako je bil uporabljen časovni korak Δ_t 5 krat večji od časovnega koraka, ki so ga narekovali stabilnostni pogoji konvekcijsko-difuzijskih eksplisitnih shem (113-117).

Pri simulacijah nestisljive kapljevine tlačno polje spremeni komponente hitrosti v_x in v_y tako, da je enačba ohranitve mase (98) zadovoljena. Ker komponenti hitrosti v_x^{n++} in v_y^{n++} še vedno ne zadovoljujeta enačbe ohranitve mase (98), jima je potrebno dodati popravek tlaka $d\Phi^n$:

$$\bar{v}_x^{n+1}(x, y1) = \bar{v}_x^{n++}(x, y1) - \frac{\Delta_t}{\omega_U} \sum_{b=V,Z} (d\Phi^n \gamma)_b \quad (124)$$

$$\bar{v}_y^{n+1}(x1, y) = \bar{v}_y^{n++}(x1, y) - \frac{\Delta_t}{\omega_V} \sum_{b=N,S} (d\Phi^n \gamma)_b \quad (125)$$

Enačbo za popravek tlaka dobimo, če enačbi prenosa gibalne količin (124-125) vstavimo v enačbo ohranitve mase v $n+1$ časovnem koraku (98):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_{x1}^+} \right) d\Phi^n(x1 + \Delta_x, y1) - \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_{x1}^+} + \frac{\Delta_y}{\Delta_{x1}} \right) d\Phi^n(x1, y1) + \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_{x1}} \right) d\Phi^n(x1 - \Delta_x, y1) \\ & + \left(\frac{\Delta_x}{\Delta_{y1}^+} \right) d\Phi^n(x1, y1 + \Delta_y) - \left(\frac{\Delta_x}{\Delta_{y1}^+} + \frac{\Delta_x}{\Delta_{y1}} \right) d\Phi^n(x1, y1) + \left(\frac{\Delta_x}{\Delta_{y1}} \right) d\Phi^n(x1, y1 - \Delta_y) = \\ & = \frac{1}{\Delta_t} \left[\Delta_y \bar{v}_x^{n++}(x + \Delta_x, y1) - \Delta_y \bar{v}_x^{n++}(x, y1) + \Delta_x \bar{v}_y^{n++}(x1, y + \Delta_y) - \Delta_x \bar{v}_y^{n++}(x1, y) \right] \end{aligned} \quad (126)$$

oziroma v matrični obliki

$$A_{ji} d\Phi_j^n = rhs_i^n \quad (127)$$

Pri tem smo upoštevali, da lahko stranice in prostornine končnih volumnov zapišemo z medtočkovnimi razdaljami numerične mreže. Tako za končni volumen M v dvorazsežnem prostoru veljajo naslednje odvisnosti:

$$\begin{aligned} \gamma_E &= -\gamma_W = \Delta_y \\ \gamma_N &= -\gamma_S = \Delta_x \\ \Delta_y &= y(j+1,i) - y(j,i) \\ \Delta_x &= x(j,i+1) - x(j,i) \\ \omega_M(x1, y1) &= \Delta_x \Delta_y \end{aligned} \quad (128)$$

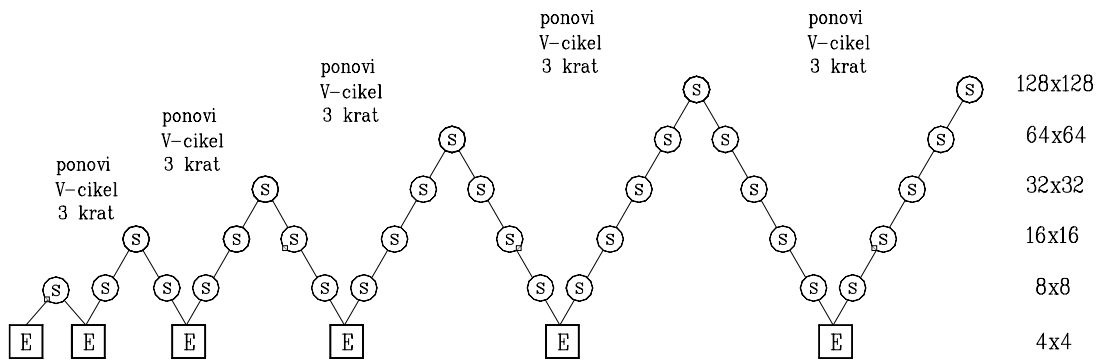
za končni volumen U :

$$\begin{aligned} \gamma_E &= -\gamma_W = \Delta_y \\ \gamma_N &= -\gamma_S = \Delta_{x1} \\ \Delta_y &= y(j+1,i) - y(j,i) \\ \Delta_{x1} &= x1(j,i) - x1(j,i-1) \\ \Delta_{x1}^+ &= x1(j,i+1) - x1(j,i) \\ \omega_U(x, y1) &= \Delta_{x1} \Delta_y \end{aligned} \quad (129)$$

in za končni volumen V :

$$\begin{aligned} \gamma_E &= -\gamma_W = \Delta_{y1} \\ \gamma_N &= -\gamma_S = \Delta_x \\ \Delta_{y1} &= y1(j,i) - y1(j-1,i) \\ \Delta_{y1}^+ &= y1(j+1,i) - y1(j,i) \\ \Delta_x &= x(j,i+1) - x(j,i) \\ \omega_V(x1, y) &= \Delta_x \Delta_{y1} \end{aligned} \quad (130)$$

Dobljena enačba (126) je eliptičnega tipa, z utežmi, ki se krajevno spreminjajo zaradi neekvidistančnosti numerične mreže. Rešitev te enačbe, to je popravek tlaka $d\Phi^n$, je bila izračunana z večmrežno metodo, kot so jo podrobno opisali Press in sodelavci [64]. Slika 4 podaja osnovno strukturo uporabljene metode. Izračun je potekal na 6 zaporednih numeričnih mrežah z 4x4, 8x8, 16x16, 32x32, 64x64 in 128x128 mrežnimi točkami, pri čemer je bil vsak interpolacijski V-cikel ponovljen do 3 krat.



Slika 4: Struktura ciklov večmrežne metode.

Točna rešitev na dnu vsakega iteracijskega V-cikla je bila dobljena z Gauss-Seidlovo metodo relaksacije, ki relaksirano polje razdeli po vzorcu šahovnice. Ta postopek je pomemben, saj je le-tako vektor odstopanja od rešitve sistema enačb:

$$res_i^n = rhs_i^n - A_{ji} d\Phi_j^n \tag{131}$$

po vsaki relaksaciji gladek.

Po izračunu popravka tlaka $d\Phi^n$ in komponent hitrosti v_x^{n+1} , v_y^{n+1} (124,125) dodamo le-tega tlačnemu polju Φ^n in izračunamo tlak v časovnem koraku $n+1$:

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + d\Phi^n \tag{132}$$

Predstavljena metoda razstavitve tlačnega polja Φ^n in izračuna njegovega popravka $d\Phi^n$ v vsakem časovnem koraku se imenuje metoda korekcije tlaka (Pressure Correction Method) in je podrobneje opisana v [65].

3.5 Testiranje numerične sheme na standardnih problemih (benchmarking)

V večini primerov zahteva reševanje kompleksnih sistemov prenosnih enačb numerične metode, pri čemer so razvoj in uporaba le-teh povezani z napako diskretizacije, konsistenco diskretizacije, stabilnostjo algoritma in njegovo konvergenco. Našteti pojmi so obširno razloženi v delu Hirscha [66].

Rezultati računalniških modelov morajo biti temeljito preverjeni, da se preprečijo konceptualne napake pri gradnji modela, in potrjeni z rezultati drugih avtorjev, da se zagotovi konsistenca numerične sheme. Najpomembnejšo vlogo v tem procesu ima testiranje rezultatov numerične sheme na standardnih problemih (benchmarking). Referenčni rezultati so lahko v tem primeru analitične rešitve ali aproksimacije, eksperimentalne vrednosti, prav tako pa tudi zanesljivi rezultati numeričnih izračunov. Pri tem je pomembno, da imajo standardni problemi enostavno geometrijo in so tako eksperimentalno kot računsko izvedljivi (Leong in sodelavci [67]), pri tem pa znani in sprejeti v širokem krogu strokovne javnosti.

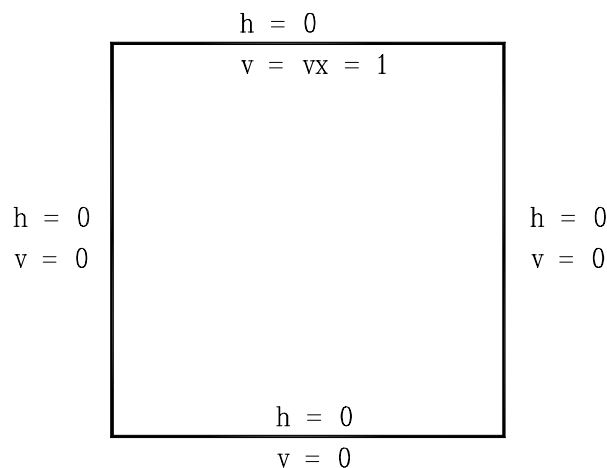
Natančne numerične rešitve standardnih problemov predstavljajo referenčno točko pri razvoju vsakega numeričnega programa. Če namreč numerični program natančno reproducira rešitev standardnega problema, potem smemo ta program uporabiti za reševanje podobnih problemov, katerih rešitve še niso vnaprej znane (Leong in sodelavci [68]).

3.5.1 Tok v kotanji

Standardni problemi za nestisljive tokove so največkrat izbrani tako, da so njihove rešitve stacionarne. Tako so Freitas [69] in Rodi in sodelavci [70] za prisilno konvekcijo nestisljive tekočine definirali naslednje standardne probleme:

- ◆ tok v horizontalni mejni plasti,
- ◆ tok v kanalu,
- ◆ tok v kotanji,
- ◆ tok čez geometrijsko stopnico in
- ◆ obtekanje telesa.

Primer gnanega toka v kotanji, kot ga prikazuje skica na sliki 5, sem izbral kot standardni problem prisilne konvekcije za testiranje numerične sheme. V tem primeru deluje zaradi premikajoče se zgornje stene in viskoznosti na kapljevino konstantna gonilna sila.



Slika 5: Simulacijsko območje prisilne konvekcije v kotanji velikosti 1:1.

Ta standardni primer je bil obdelan že mnogokrat, najpopolnejše rezultate dvorazsežnega toka pa so objavili Ghia in sodelavci [71]. Ker so prenosne enačbe in rezultati simuliranega modela v brezdimenzijski obliki, ki se razlikuje od oblike uporabljene pri simulaciji toka kapljevine z notranjo generacijo toplote (98-101), je potrebno fizikalni model na kratko opisati.

Enačbi prenosa mase (6) in gibalne količine (7) sta bili prevedeni v brezdimenzijsko obliko, pri čemer so bile uporabljene naslednje osnovne skale sistema :

- ◆ geometrijska dimenzija simulacijskega območja: L_0 ,
- ◆ hitrost zgornje stene: v_0 , in
- ◆ viskoznost: ν_0 .

S pomočjo definiranih osnovnih skal so bile nato izpeljane brezdimenzijske oblike enačb prenosa mase (133) in gibalne količine v x in v y smeri (134,135).

$$\partial_x \bar{v}_x + \partial_y \bar{v}_y = 0 \quad (133)$$

$$\partial_t \bar{v}_x + \partial_x (\bar{v}_x \bar{v}_x) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{v}_x) = -\partial_x \bar{p} + \frac{1}{Re} (\partial_x \partial_x \bar{v}_x + \partial_y \partial_y \bar{v}_x) + 2(\partial_x (v_t \bar{S}_{xx}) + \partial_y (v_t \bar{S}_{yx})) \quad (134)$$

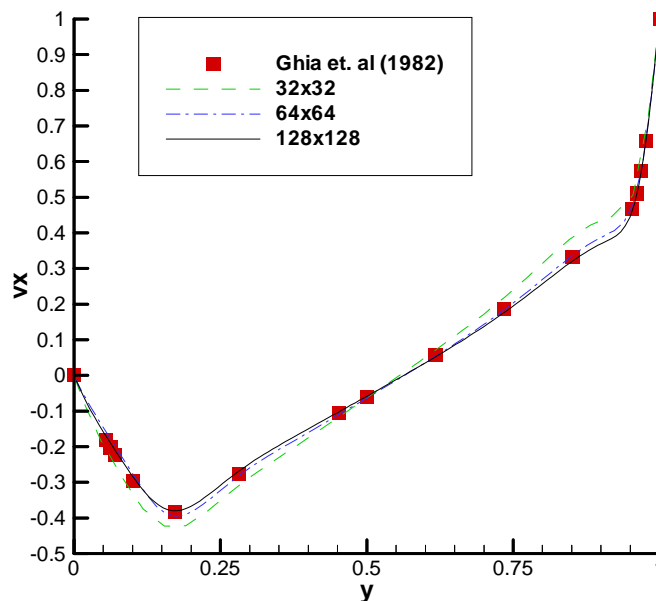
$$\partial_t \bar{v}_y + \partial_x (\bar{v}_x \bar{v}_y) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{v}_y) = -\partial_y \bar{p} + \frac{1}{Re} (\partial_x \partial_x \bar{v}_y + \partial_y \partial_y \bar{v}_y) + 2(\partial_x (v_t \bar{S}_{xy}) + \partial_y (v_t \bar{S}_{yy})) \quad (135)$$

Pri tem ostane Reynoldsovo število $Re = v_0 L_0 / \nu_0$ edini prosti parameter sistema.

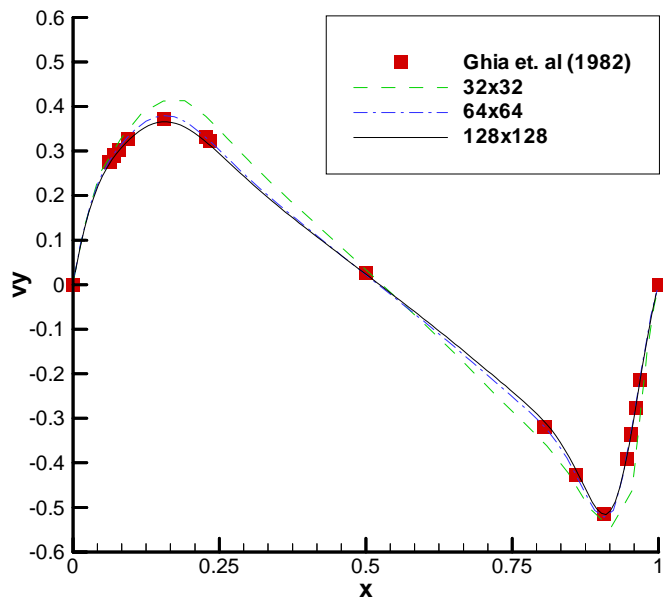
Preverjanje numerične sheme in potrjevanje rezultatov je bilo opravljeno za Reynoldsova števila $Re = 1000, 3600, \text{ in } 10000$. V potrditev konsistentnosti numeričnih rezultatov so bili izračuni izvedeni na treh različno gostih numeričnih mrežah s 32×32 , 64×64 in 128×128 računskimi točkami.

Zaradi skladnosti označevanja so prenosne enačbe (133-135) zapisane s krajevno povprečenimi veličinami in definirano turbulentno viskoznostjo ν_t . Pri izračunih je bila uporabljena konstanta Smagorinskega $C_s = 0.1$, kot je predlagal že Deardorff [46]. Ker je režim toka pri navedenih vrednosti Reynoldsovega števila v osnovi laminaren, je turbulentna viskoznost nizka pri vseh treh gostotah uporabljenih numeričnih mrež. Zaradi tega zadnji členi v enačbah (134) in (135) bistveno ne vplivajo na rezultat, krajevno povprečene veličine pa so praktično enake lokalnim.

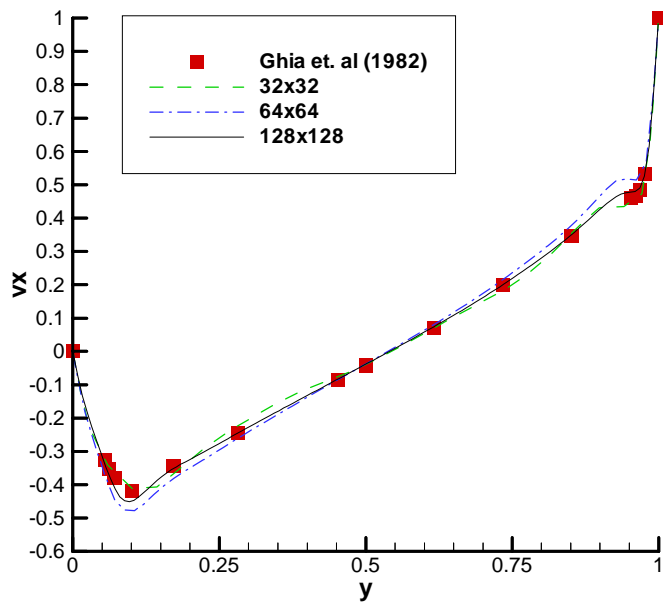
Primerjava rezultatov izvedenih numeričnih izračunov z rezultati Ghie in sodelavcev [71] kaže dobro ujemanje profilov hitrosti v_x in v_y , kar je prikazano na slikah 6-11.



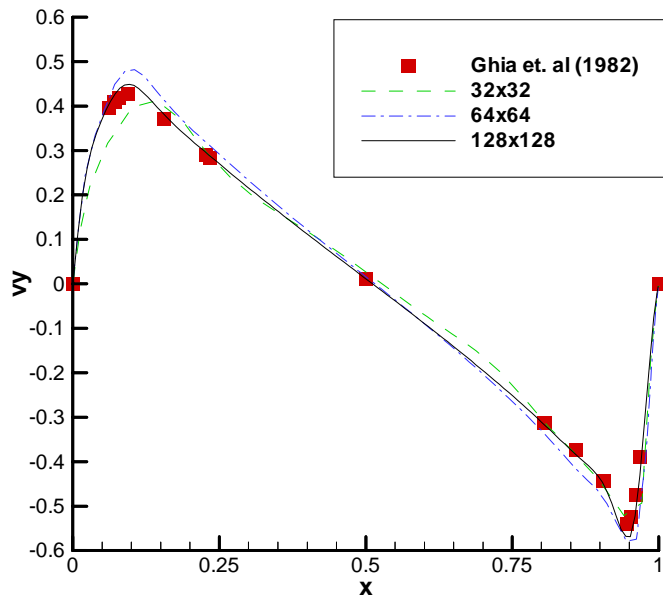
Slika 6: Vertikalni profil hitrosti v_x , $Re = 1000$, $x = 0.5$



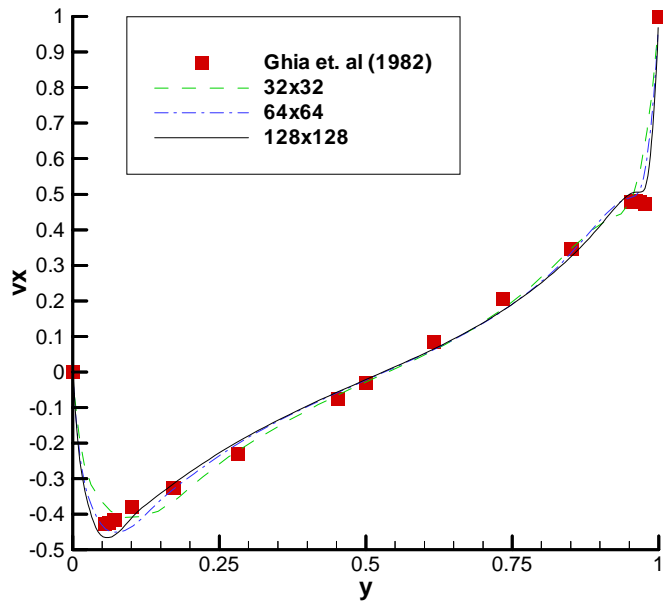
Slika 7: Horizontalni profil hitrosti v_y , $Re = 1000$, $y = 0.5$



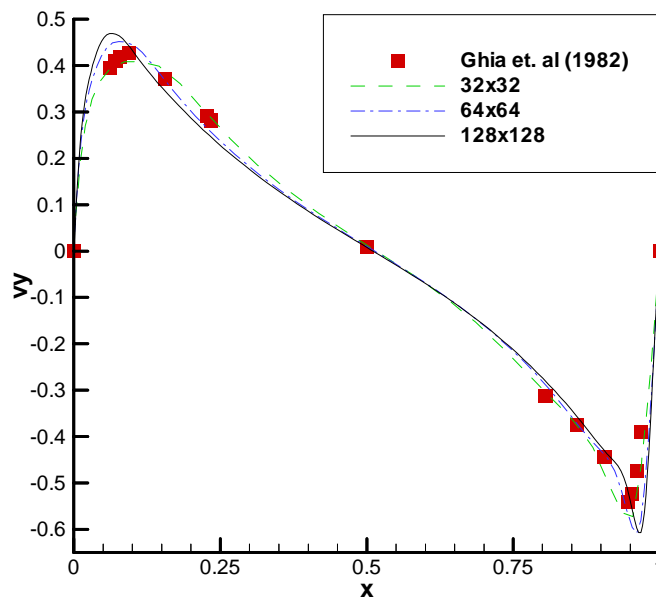
Slika 8: Vertikalni profil hitrosti v_x , $Re = 3600$, $x = 0.5$



Slika 9: Horizontalni profil hitrosti v_y , $Re = 3600$, $y = 0.5$



Slika 10: Vertikalni profil hitrosti v_x , $Re = 10000$, $x = 0.5$



Slika 11: Horizontalni profil hitrosti v_y , $Re = 10000$, $y = 0.5$

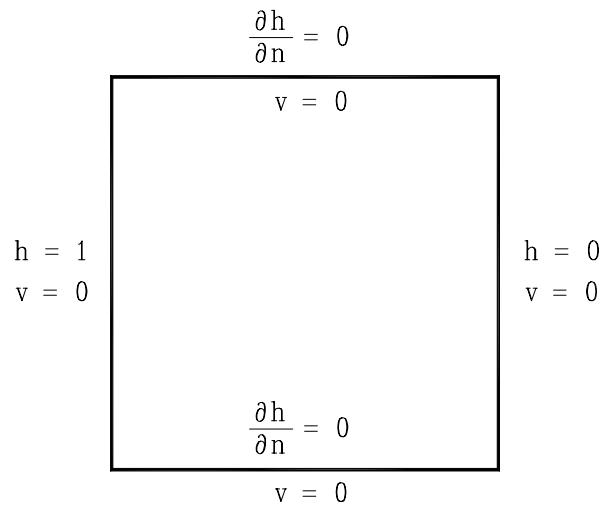
3.5.2 Tok v kotanji z vertikalno greto steno

Hanjalić in sodelavci [72] so za naravno konvekcijo nestisljive tekočine kot primerne predlagali sledeče standardne primere:

- ◆ *vertikalno mejno plast,*
- ◆ *vertikalno plast kapljevine z greto steno,*
- ◆ *horizontalno plast kapljevine z gretim dnom,*
- ◆ *tok v kotanji z vertikalno greto steno,*
- ◆ *tok v kotanji z gretim dnom, in*
- ◆ *horizontalni kolobar z greto notranjo steno.*

Primer toka v kotanji z vertikalno greto steno, kot ga prikazuje skica na sliki 12, je bil izbran kot prvi standardni problem naravne konvekcije. Gonilna sila gibanja tekočine je v tem primeru vzgon, ki je posledica temperaturne razlike v horizontalni smeri. Tekočina se ob levi steni segreva in zaradi vzgona dviguje, medtem ko se ob desni steni ohlaja in spušča.

Preverjanje numerične sheme in potrjevanje rezultatov je bilo opravljeno na osnovi numeričnih izračunov Rahmana in sodelavcev [73]. Z razliko od primera z notranjo generacijo toplote, prehaja toplota v obravnavanem primeru skozi vertikalne stene sistema. To ima za posledico spremembo v obliki enačbe prenosa toplotne energije (139) in njenih robnih pogojev, ki so podani na sliki 12.



Slika 12: Simulacijsko območje naravne konvekcije v kotanji velikosti 1:1 z vertikalno greto steno.

Enačbe prenosa mase, gibalne količine in toplotne energije so bile prevedene v brezdimenzijsko obliko, pri čemer so bile uporabljene naslednje osnovne skale sistema :

- ◆ geometrijska dimenzija simulacijskega območja: L_0 ,
- ◆ temperaturna razlika: h_0 in
- ◆ snovske lastnosti tekočine: ν_0 , λ_0 , c_{p0} , ρ_0 , β_0 .

Na osnovi tako definiranih osnovnih skal so bile nato izpeljane brezdimenzijske oblike enačb prenosa mase (136), gibalne količine v x in v y smeri (137,138) ter toplotne energije (139).

$$\partial_x \bar{v}_x + \partial_y \bar{v}_y = 0 \quad (136)$$

$$\partial_t \bar{v}_x + \partial_x (\bar{v}_x \bar{v}_x) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{v}_x) = -\partial_x \bar{p} + Pr (\partial_x \partial_x \bar{v}_x + \partial_y \partial_y \bar{v}_x) + 2(\partial_x (\mathbf{v}_t \bar{S}_{xx}) + \partial_y (\mathbf{v}_t \bar{S}_{yx})) \quad (137)$$

$$\partial_t \bar{v}_y + \partial_x (\bar{v}_x \bar{v}_y) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{v}_y) = -\partial_y \bar{p} + Pr (\partial_x \partial_x \bar{v}_y + \partial_y \partial_y \bar{v}_y) + 2(\partial_x (\mathbf{v}_t \bar{S}_{xy}) + \partial_y (\mathbf{v}_t \bar{S}_{yy})) \quad (138)$$

$$+ Ra Pr \bar{h}$$

$$\partial_t \bar{h} + \partial_x (\bar{v}_x \bar{h}) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{h}) = (\partial_x \partial_x \bar{h} + \partial_y \partial_y \bar{h}) + (\partial_x (\mathbf{v}_t \partial_x \bar{h}) + \partial_y (\mathbf{v}_t \partial_y \bar{h})) \quad (139)$$

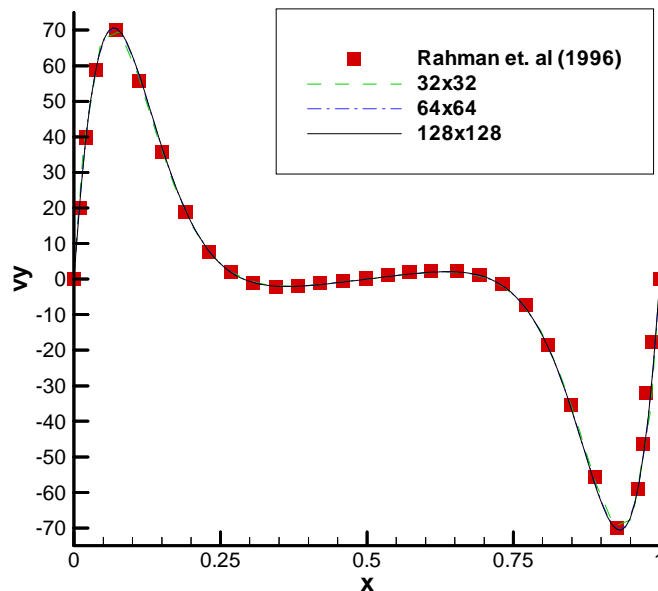
Prosta parametra sistema sta Prandtlovo število (18) in Rayleighovo število (19).

Osnova za preverjanje numerične sheme in potrjevanje rezultatov so bile simulacije opravljene za Prandtlovo število $Pr = 1$ in Rayleighova števila $Ra = 10^5$, 10^6 in 10^7 . V potrditev konsistentnosti numeričnih rezultatov so bili izračuni ponovno izvedeni na treh različno gostih numeričnih mrežah z 32×32 , 64×64 in 128×128 računskimi točkami. Uporabljena konstanta Smagorinskega je bila prevzeta od Eidsona [42] in je znašala $C_s = 0.21$.

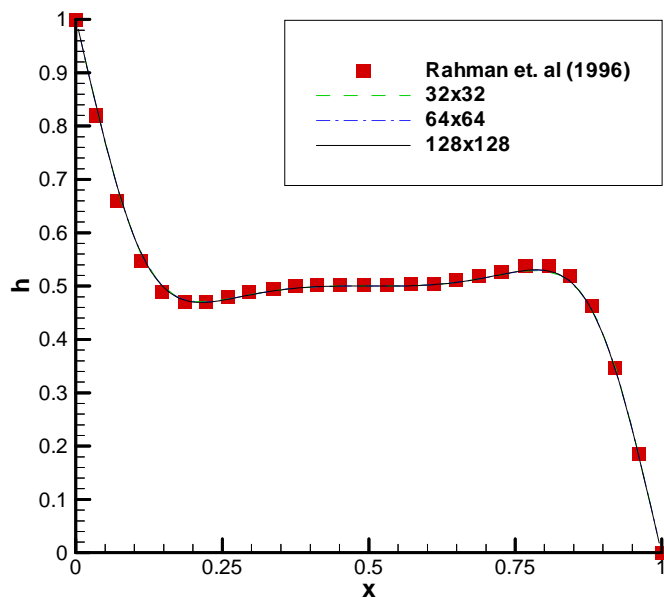
Režim toka je pri navedenih vrednostih Prandtlovega in Rayleighovega števila laminaren, saj je prehod v bifurkacijski režim, ko je rešitev enačb (136-139) oscilirajoča,

pričakovati šele pri Rayleighovem številu $Ra = 2 \cdot 10^8$ (Janssen in Henkes [74]). Zaradi tega je turbulentna viskoznost ν_t zanemarljiva pri resoluciji uporabljenih numeričnih mrež. Tako člani turbulentnih napetosti v enačbah (137,138) in člen turbulentne toplotne difuzije v enačbi (139) ne vplivajo na rezultat, krajevno povprečene veličine pa so praktično enake lokalnim.

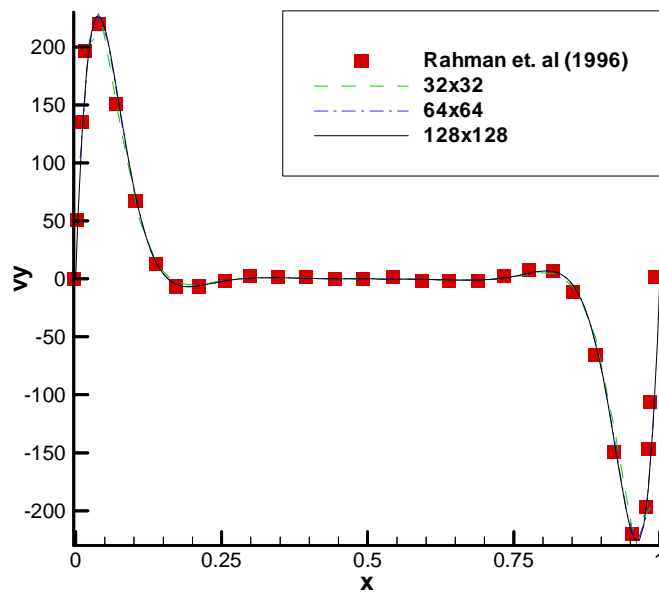
Slike 13-18 prikazujejo primerjavo rezultatov numeričnih izračunov profilov hitrosti v_y in temperature h z rezultati Rahmana in sodelavcev [73].



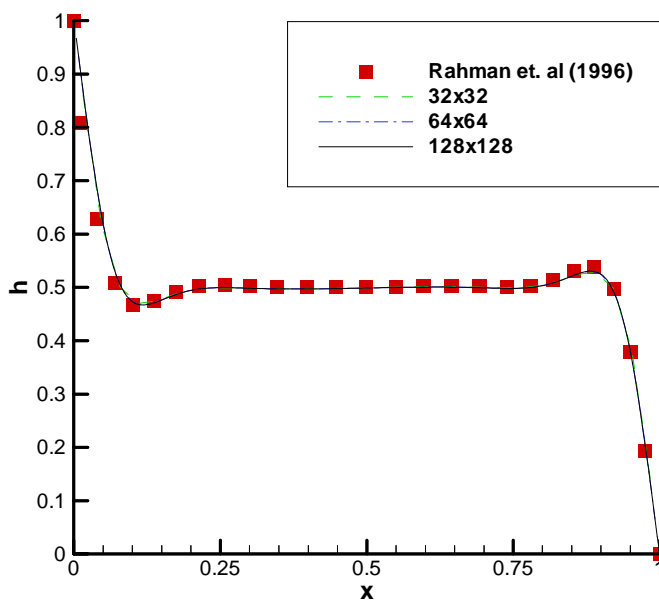
Slika 13: Horizontalni profil hitrosti v_y , $Pr = 1$, $Ra = 10^5$, $y = 0.5$.



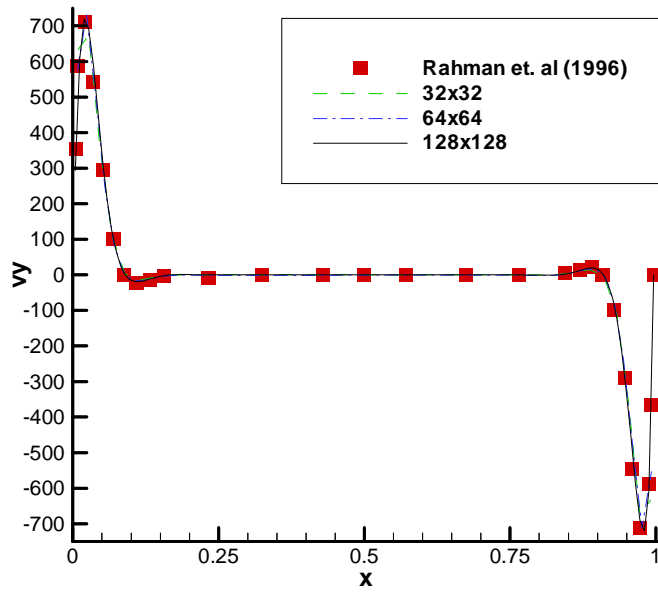
Slika 14: Horizontalni profil temperature h , $Pr = 1$, $Ra = 10^5$, $y = 0.5$.



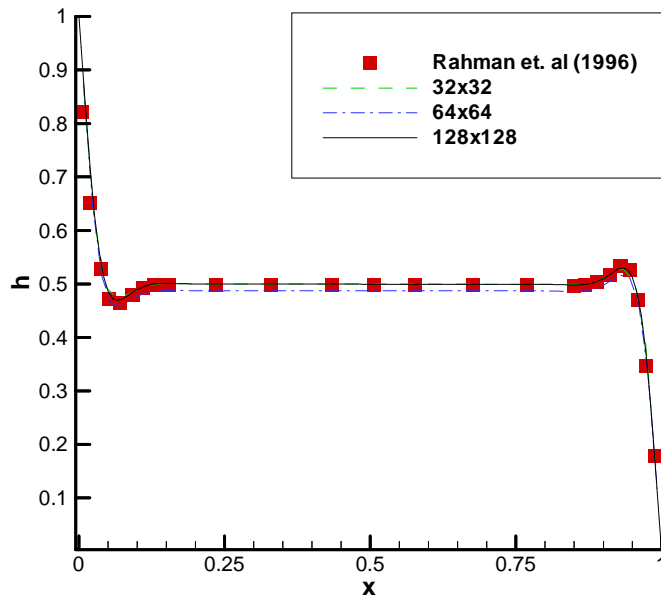
Slika 15: Horizontalni profil hitrosti v_y , $Pr = 1$, $Ra = 10^6$, $y = 0.5$.



Slika 16: Horizontalni profil temperature h , $Pr = 1$, $Ra = 10^6$, $y = 0.5$.



Slika 17: Horizontalni profil hitrosti v_y , $Pr = 1$, $Ra = 10^7$, $y = 0.5$.

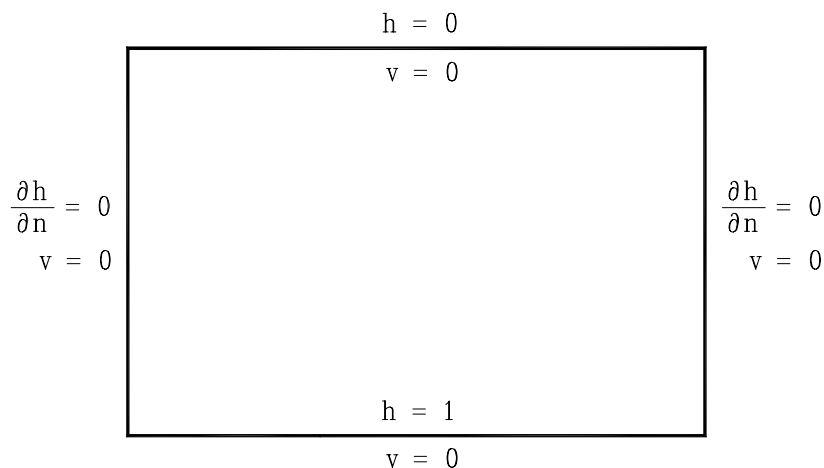


Slika 18: Horizontalni profil temperature h , $Pr = 1$, $Ra = 10^7$, $y = 0.5$.

Uporaba numeričnih mrež gostote 32x32, 64x64 in 128x128 računskih točk ne prinaša večje razlike v kvaliteti rezultatov. Primerjava kaže dobro ujemanje tudi v primeru, ko je bila uporabljena numerična mreža z 32x32 računskimi točkami. Razlika je vidna le v primeru horizontalnega temperaturnega profila pri Rayleighovem številu $Ra = 10^7$. Zaradi izredno dobrega ujemanja, je mogoče trditi, da 32x32 računskih točk že zadostuje za natančno reprodukcijo hitrostnega in temperaturnega polja.

3.5.3 Tok v kotanji z gretim dnom

Naravna konvekcija v kotanji z gretim dnom je bila izbrana za naslednji standardni primer. Pogosto je ta problem poimenovan tudi Rayleigh-Bénardova konvekcija. Tako kot v prejšnjem primeru, je tudi sedaj gonilna sila gibanja tekočine vzgon, ki je posledica temperaturne razlike med spodnjo in zgornjo steno. Kot prikazuje slika 19, so horizontalne stene adiabatne.



Slika 19: Simulacijsko območje naravne konvekcije v kotanji velikosti 1.5:1 z gretim dnom.

Preverjanje numerične sheme in potrjevanje rezultatov je bilo opravljeno na osnovi numeričnih izračunov Hanjalića in sodelavcev [72]. Tako kot v prejšnjem standardnem primeru, lahko prenosne enačbe prevedemo v brezdimenzijsko obliko z uporabo naslednjih osnovnih skal sistema:

- ◆ *geometrijska dimenzija simulacijskega območja:* L_0 ,
- ◆ *temperaturna razlika:* h_0 in
- ◆ *snovske lastnosti tekočine:* $\nu_0, \lambda_0, c_{p0}, \rho_0, \beta_0$.

Medtem ko se oblika enačb prenosa mase (140), gibalne količine v x in v y smeri (141-142) ter toplotne energije (143) ne spremeni, pa prinese sprememba v robnih pogojih enačbe prenosa toplotne energije (slika 19) različno dinamiko toka in prenosa toplote.

$$\partial_x \bar{v}_x + \partial_y \bar{v}_y = 0 \quad (140)$$

$$\partial_t \bar{v}_x + \partial_x (\bar{v}_x \bar{v}_x) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{v}_x) = -\partial_x \bar{p} + Pr (\partial_x \partial_x \bar{v}_x + \partial_y \partial_y \bar{v}_x) + 2(\partial_x (\mathbf{v}_t \bar{S}_{xx}) + \partial_y (\mathbf{v}_t \bar{S}_{yx})) \quad (141)$$

$$\partial_t \bar{v}_y + \partial_x (\bar{v}_x \bar{v}_y) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{v}_y) = -\partial_y \bar{p} + Pr (\partial_x \partial_x \bar{v}_y + \partial_y \partial_y \bar{v}_y) + 2(\partial_x (\mathbf{v}_t \bar{S}_{xy}) + \partial_y (\mathbf{v}_t \bar{S}_{yy})) + Ra Pr \bar{h} \quad (142)$$

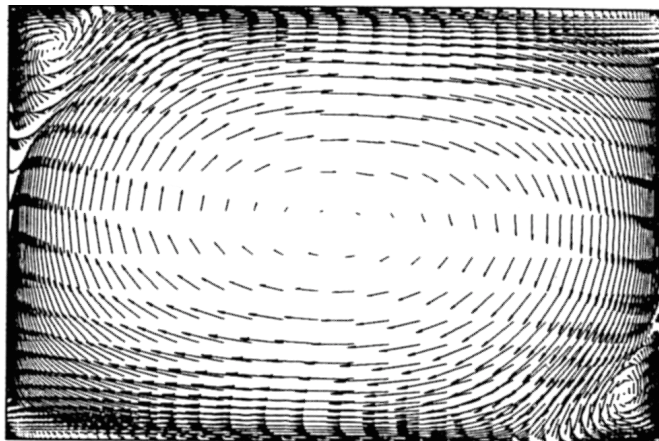
$$\partial_t \bar{h} + \partial_x (\bar{v}_x \bar{h}) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{h}) = (\partial_x \partial_x \bar{h} + \partial_y \partial_y \bar{h}) + (\partial_x (\mathbf{v}_t \partial_x \bar{h}) + \partial_y (\mathbf{v}_t \partial_y \bar{h})) \quad (143)$$

Prosta parametra sistema sta Prandtlovo število (18) in Rayleighovo število (19).

Za razliko od standardnega primera naravne konvekcije v kotanji z vertikalno greto steno, kjer postane gibanje tekočine turbulentno šele pri visokih vrednostih Rayleighovega števila ($Ra > 2 \cdot 10^8$), pa v primeru Rayleigh-Bénardove konvekcije nastopi prehod v turbulentno gibanje neposredno po prekoračitvi prve bifurkacijske točke. Zaradi nestabilnosti toplotno razslojenega toka, so tokovni vzorci pri Rayleigh-Bénardovi konvekciji mnogo bolj nestabilni in časovno odvisni. Prav tako lahko majhne spremembe geometrije, kot na primer sprememba razmerja stranic kotanje, popolnoma spremenijo smer toka tekočine.

Osnova za preverjanje numerične sheme in potrjevanje rezultatov so bile simulacije opravljene za Prandtlovo število $Pr = 0.71$ in Rayleighovo število $Ra = 10^8$. Razmerje stranic simulacijskega območja 1.5:1 je bilo izbrano kot mejni primer, saj se ob majhni nepravilnosti modela ali diskretizacijski napaki na videz stabilen cirkulacijski vzorec poruši in namesto enega vrtinca nastaneta dva. V potrditev konsistentnosti numeričnih rezultatov so bili izračuni izvedeni na treh različno gostih numeričnih mrežah z 32x24, 64x48 in 128x96 računskimi točkami. Uporabljena konstanta Smagorinskega pa je bila prevzeta od Eidsona [42] in je znašala $C_s = 0.21$.

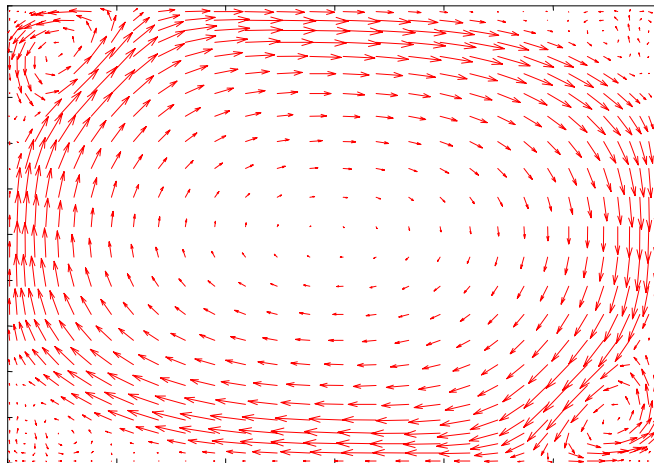
Režim toka je pri navedenih vrednostih Prandtlovega in Rayleighovega števila turbulenten, pri čemer je izračunana turbulentna viskoznost za red velikosti višja od kinematične viskoznosti tekočine. V tem primeru členi turbulentnih napetosti v enačbah (141-142) in člen turbulentne toplotne difuzije v enačbi (143) pomembno vplivajo na oblikovanje hitrostnega in temperaturnega polja in jih ne smemo zanemariti.



Slika 20: Tokovno polje, $Pr = 0.71$, $Ra = 10^8$, $y = 0.5$ (Hanjalić in sodelavci [72]).

Slika 20 prikazuje hitrostno polje, ki je rezultat numeričnih simulacij Hanjalića in sodelavcev [72]. V njihovem primeru je bil za modeliranje turbulentne naravne konvekcije uporabljen štiri enačbni model turbulentnih napetosti in toplotnih tokov $k-\varepsilon-\overline{\theta^2}-\varepsilon_0$.

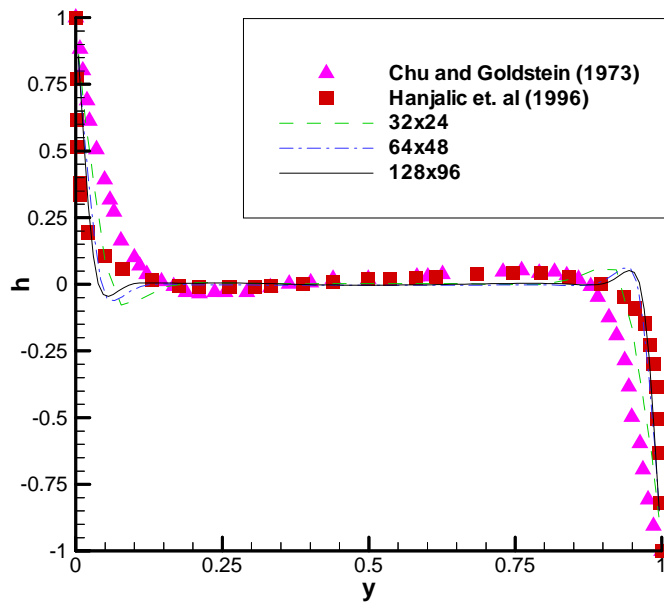
Na sliki 21 pa je hitrostno polje pridobljeno z modelom simulacije velikih vrtincev, opisanem v 2. poglavju. Zaradi preglednosti slike je prikazana le vsaka četrta računsko točka. Iz obeh slik je razvidno, da sta cirkulacijska vzorca enaka, sestavljena iz velikega osrednjega vrtinca in dveh manjših vrtincev v zgornjem levem in spodnjem desnem kotu. To kaže na sposobnost modela simulacije velikih vrtincev, da zajame tudi manjše strukture toka in pri tem ne spremeni njihove dinamike.



Slika 21: Tokovno polje, $Pr = 0.71$, $Ra = 10^8$, $y = 0.5$, model simulacije velikih vrtincev.

Slika 22 prikazuje vertikalni profil temperature h . Rezultati izračunov na numeričnih mrežah različnih gostot so primerjani z eksperimentalnimi rezultati Chuja in Goldsteina [75] in numeričnimi rezultati Hanjalića in sodelavcev [72]. Dodatno je potrebno omeniti, da so bili rezultati Chuja in Goldsteina pridobljeni za naravno konvekcijo v plasti vode ($Pr \sim 7$) pri Rayleighovem številu $Ra = 4 \cdot 10^5$. Rezultati izračunov kažejo konsistentnost in dobro ujemanje z rezultati Hanjalića in sodelavcev, posebno še ob mejah in osrednjem delu simulacijskega območja. Opazne napake se pojavijo na zunanji strani mejne plasti, kjer je hitrost tekočine previsoka, profil v osrednjem delu pa preveč ploščat.

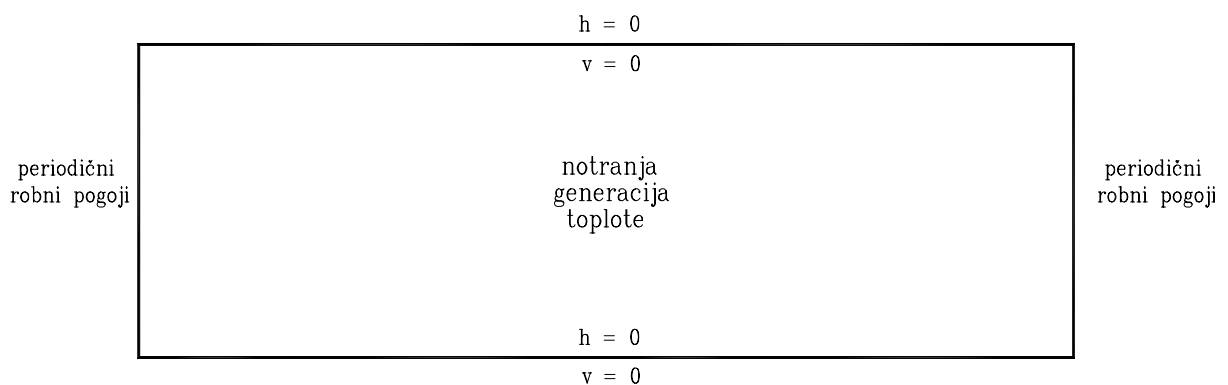
Uspešna uporaba modela velikih vrtincev v primeru turbulentne Rayleigh-Bénardove konvekcije, ko je sistem blizu svoje meje stabilnosti, potrjuje pravilnost samega pristopa in sposobnost modela za simuliranje turbulentnih vzgonskih tokov.



Slika 22: Vertikalni profil temperature h , $Pr = 0.71$, $Ra = 10^8$, $y = 0.5$.

3.5.4 Horizontalna plast kapljevine z volumetričnim gretjem

Primer naravne konvekcije v plasti kapljevine z volumetričnim gretjem, kot ga prikazuje skica na sliki 23, je bil izbran kot zadnji standardni problem za testiranje numerične sheme. Gonilna sila gibanja kapljevine je v tem primeru vzgon, ki je posledica temperaturne razlike med vročim jedrom plasti in hladnimi horizontalnimi stenami. Kapljevina se volumetrično greje zaradi notranje generacije toplote, na tleh in na stropu pa se kapljevina ohlaja zaradi izotermnih robnih pogojev.



Slika 23: Simulacijsko območje naravne konvekcije v plasti kapljevine velikosti 5:1 z volumetrično generacijo toplote.

Preverjanje numerične sheme in potrjevanje rezultatov je bilo opravljeno na osnovi numeričnih izračunov Wörnerja in sodelavcev [54,76], ki so izvedli direktne trirazsežne simulacije plasti kapljevine. Enačbe prenosa mase, gibalne količine in toplotne energije so v tem primeru enake kot pri simulaciji toka kapljevine z volumetričnim gretjem v kotanji, spremenijo se le robni pogoji na vertikalnih mejah simulacijskega območja, ki jih prikazuje slika 23.

Kot je podrobneje razloženo v poglavju 2 so enačbe prenosa mase, gibalne količine in toplotne energije prevedene v brezdimenzijsko obliko, pri čemer so uporabljene naslednje osnovne skale sistema:

- ◆ *geometrijska dimenzija simulacijskega območja:* L_0 ,
- ◆ *moč notranje generacije toplote:* I_0 , in
- ◆ *snovske lastnosti kapljevine:* $\nu_0, \lambda_0, c_{p0}, \rho_0, \beta_0$.

Na osnovi tako definiranih osnovnih skal so bile nato izpeljane brezdimenzijske oblike enačb prenosa mase (144), gibalne količine v x in v y smeri (145,146) ter toplotne energije (147).

$$\partial_x \bar{v}_x + \partial_y \bar{v}_y = 0 \quad (144)$$

$$\partial_t \bar{v}_x + \partial_x (\bar{v}_x \bar{v}_x) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{v}_x) = -\partial_x \bar{p} + Pr (\partial_x \partial_x \bar{v}_x + \partial_y \partial_y \bar{v}_x) + 2 (\partial_x (\mathbf{v}_t \bar{S}_{xx}) + \partial_y (\mathbf{v}_t \bar{S}_{yx})) \quad (145)$$

$$\partial_t \bar{v}_y + \partial_x (\bar{v}_x \bar{v}_y) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{v}_y) = -\partial_y \bar{p} + Pr (\partial_x \partial_x \bar{v}_y + \partial_y \partial_y \bar{v}_y) + 2 (\partial_x (\mathbf{v}_t \bar{S}_{xy}) + \partial_y (\mathbf{v}_t \bar{S}_{yy})) \quad (146)$$

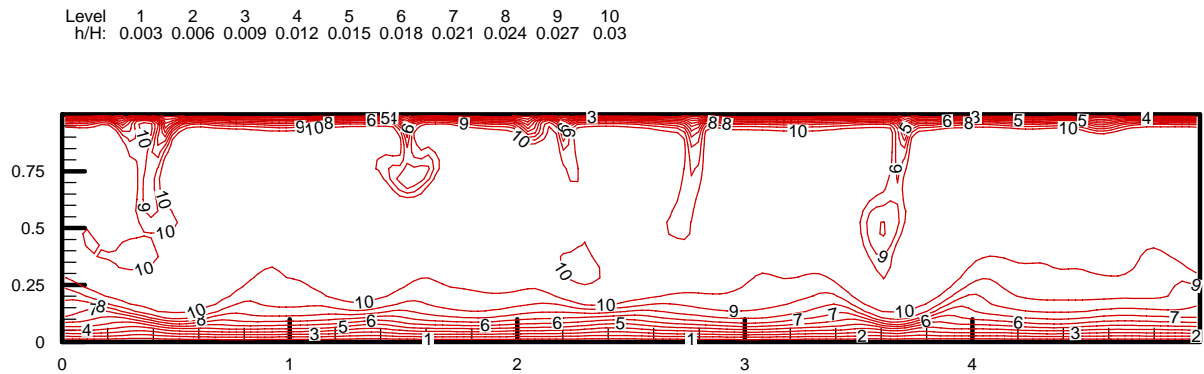
$$+ Ra Pr \bar{h}$$

$$\partial_t \bar{h} + \partial_x (\bar{v}_x \bar{h}) + \partial_y (\bar{v}_y \bar{h}) = (\partial_x \partial_x \bar{h} + \partial_y \partial_y \bar{h}) + (\partial_x (\mathbf{v}_t \partial_x \bar{h}) + \partial_y (\mathbf{v}_t \partial_y \bar{h})) \quad (147)$$

kjer sta prosta parametra sistema Prandtlovo (18) in Rayleighovo število (19).

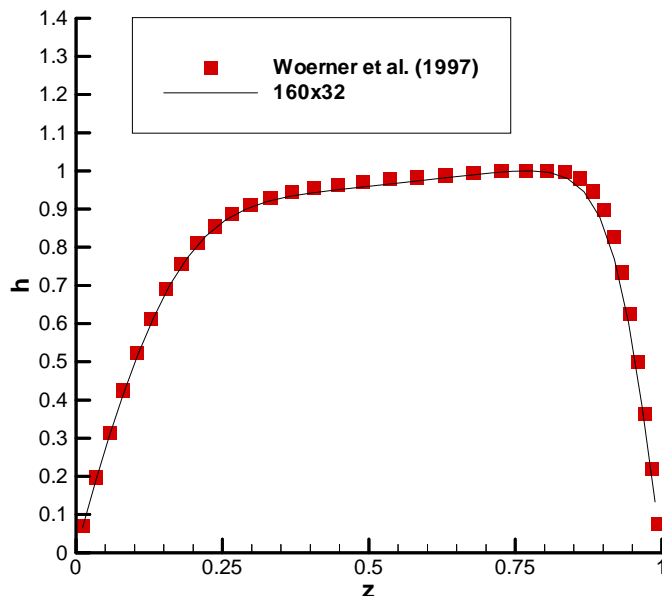
Preverjanje numerične sheme in potrjevanje rezultatov je bilo opravljeno za Prandtlovo število $Pr = 7$ in Rayleighova števila $Ra = 5 \cdot 10^6, 10^7, 10^8$ in 10^9 . Izračuni so bili opravljene na numerični mreži z 160×32 računskimi točkami, ki je bila ob spodnji in zgornji meji simulacijskega območja lokalno zgoščena, kot je pojasnjeno v poglavju 2. Pri izračunih je bila uporabljena konstanta Smagorinskega $C_s = 0.1$, kot so predlagali Horvat in sodelavci [78].

Slika 24 prikazuje trenutno temperaturno polje v plasti kapljevine pri Prandtlovem številu $Pr = 7$ in Rayleighovem številu $Ra = 10^8$. Kot je razvidno, so temperaturni gradienti največji ob spodnji in zgornji steni simulacijskega območja zaradi izotermnih robnih pogojev. Pri takšnih robnih pogojih se pretežni del toplote iz jedra na stene prenese s pomočjo toplotnega prevoda. Drugi mehanizem prenosa toplote so vdori hladne kapljevine s stropa kot posledica pojava Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti.

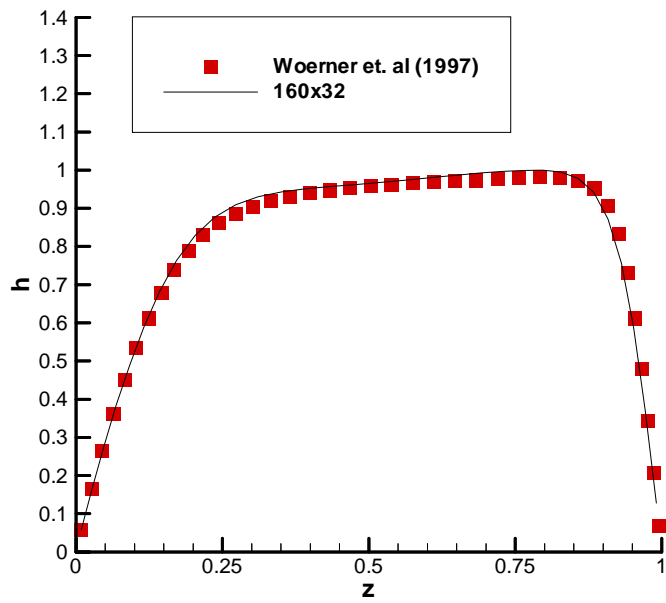


Slika 24: Temperaturno polje h , $Pr = 7.0$, $Ra = 10^8$.

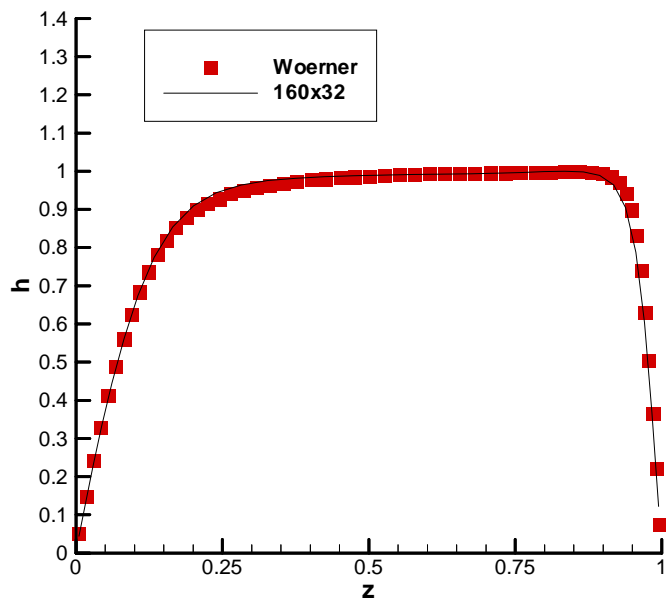
Rezultati simulacij in njihova primerjava z rezultati Wörnerja in sodelavcev [54,76] so prikazani na slikah 25-28. Kot so navedli Wörner in sodelavci [76] je režim toka pri vrednostih Rayleighovega števila $Ra = 5 \cdot 10^6$ in 10^7 laminaren, pri višjih vrednostih Rayleighovega števila pa tok postane turbulenten. Tok oblikujejo trirazsežne tokovne strukture, ki se pojavijo pod vplivom vdorov hladne kapljevine z zgornje stene. Kljub temu vertikalni profil časovno in horizontalno povprečenega temperaturnega polja dvorazsežnega modela natančno napove rezultate trirazsežnega modela (slike 27-28). To pomeni, da je pojav Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti krajevno in časovno periodičen.



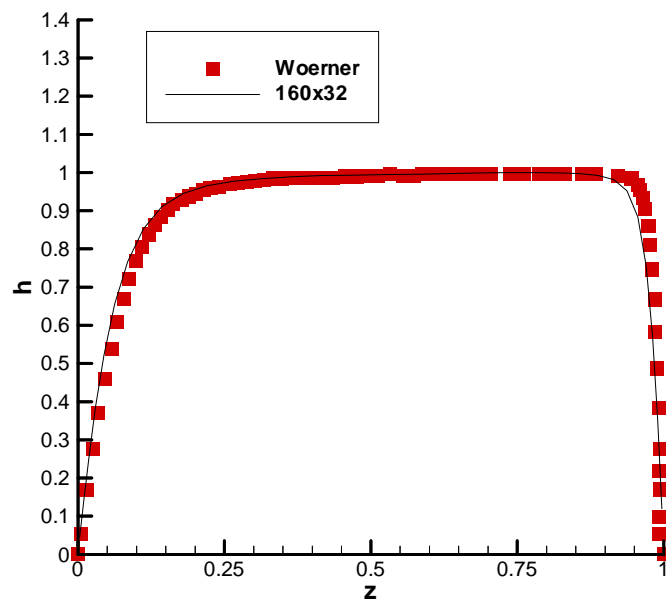
Slika 25: Povprečni vertikalni profil temperature h , $Pr = 7.0$, $Ra = 5 \cdot 10^6$.



Slika 26: Povprečni vertikalni profil temperature h , $Pr = 7.0$, $Ra = 10^7$.



Slika 27: Povprečni vertikalni profil temperature h , $Pr = 7.0$, $Ra = 10^8$.



Slika 28: Povprečni vertikalni profil temperature h , $Pr = 7.0$, $Ra = 10^9$.

4. Rezultati in razprava

Preveritev numerične sheme in potrditev rezultatov v poglavju 3 prikazanih standardnih primerov nam dovoljuje uporabo enakih matematičnih modelov in numeričnih orodij tudi za simulacijo naravne konvekcije v pravokotni kotanji pri nizkih vrednosti Prandtlovega števila ($Pr < 1$) in visokih vrednosti Rayleighovega števila ($Ra > 10^8$).

Simulacije naravne konvekcije v pravokotni kotanji z razmerjem stranic 1:1 so bile opravljene za vrednosti Rayleighovega števila $Ra = 10^6, 10^7, 10^8, 10^9, 10^{10}$ in 10^{11} . Zaradi procesov taljanja in strjevanja so bili izbrani izotermni robni pogoji. V vseh simuliranih primerih je bila vrednost Prandtlovega števila $Pr = 0.25$, kar ustreza snovskim lastnostim taline jedrske sredice v spodnjem plenumu pred pričetkom razslojevanja na kovinsko in oksidno plast (Abalin in sodelavci [24]). Talina se namreč takrat vede kot homogena zmes. Rezultate simulacij z uporabo enakih matematičnih modelov in numeričnih orodij, vendar za višje vrednosti Prandtlovega števila, je mogoče najti v objavah Horvata in sodelavcev [77], [78] in [79].

Zaradi časovne odvisnosti razvoja pojava naravne konvekcije, je bil simulacijski čas T prilagojen hitrosti procesa segrevanja kapljevine in relaksaciji toplotne energije v obliki kinetične energije gibajoče se kapljevine. Na ta način je bil izbrani simulacijski čas T vsaj dvakrat daljši od trajanja začetnega toplotnega prehodnega pojava sistema. Velikosti brezdimenzijskih simulacijskih časov T za različne vrednosti Rayleighovega števila Ra so podane v tabeli 1.

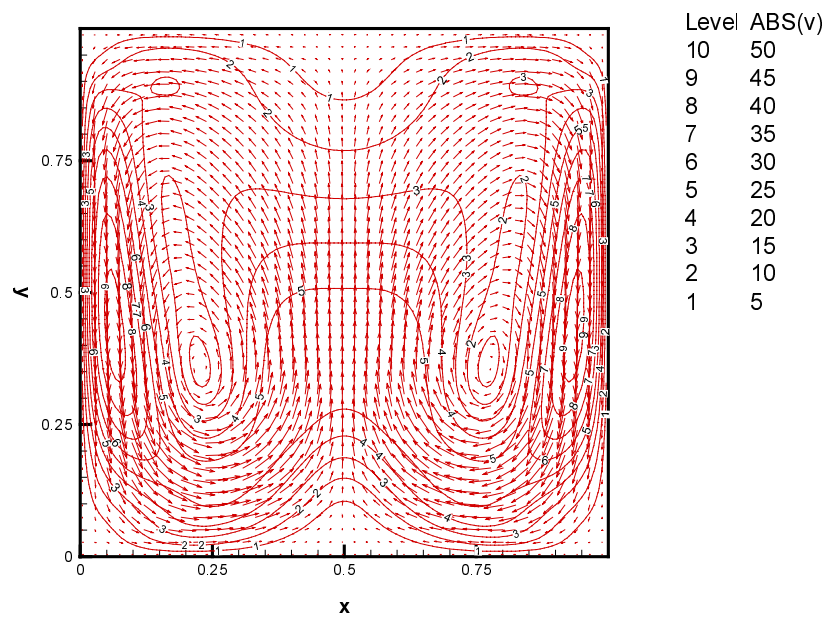
Tabela 1: Brezdimenzijski simulacijski čas

Ra	T
10^6	0.2
10^7	0.2
10^8	0.2
10^9	0.1
10^{10}	0.05
10^{11}	0.03

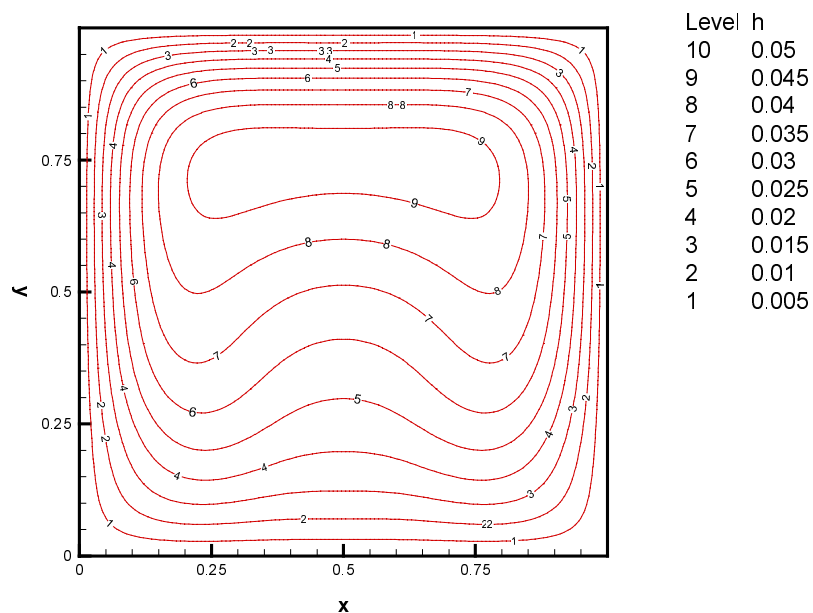
Opravljene simulacije omogočajo boljše razumevanje dinamike toka in napoved toplotne obremenitve sten spodnjega plenuma v primeru težke nesreče, kar je osrednja naloga doktorskega dela.

4.1 Tokovni režimi

V splošnem se v sredini simulacijskega območja kapljevina z volumetrično generacijo toplote dviguje pod vplivom vzgona. Ob izotermnih stenah pa se kapljevina ohlaja in se zaradi tega spušča. Ta osnovni mehanizem gibanja kapljevine vzpostavi pri Rayleighovem številu $Ra = 10^6$ dva nasprotno usmerjena vrtinca, ki sta prikazana na sliki 29. Omenjena vrtinca postaneta stabilna po preteku začetnega prehodnega pojava, kar pomeni, da ne spreminjata svoje usmerjenosti in moči. Zaradi nizkih hitrosti, se večina toplote iz notranjega jedra prenese na stene z difuzijo. Mešanja ni, zato kapljevina ostaja toplotno razslojena, kot je razvidno iz slike 30.

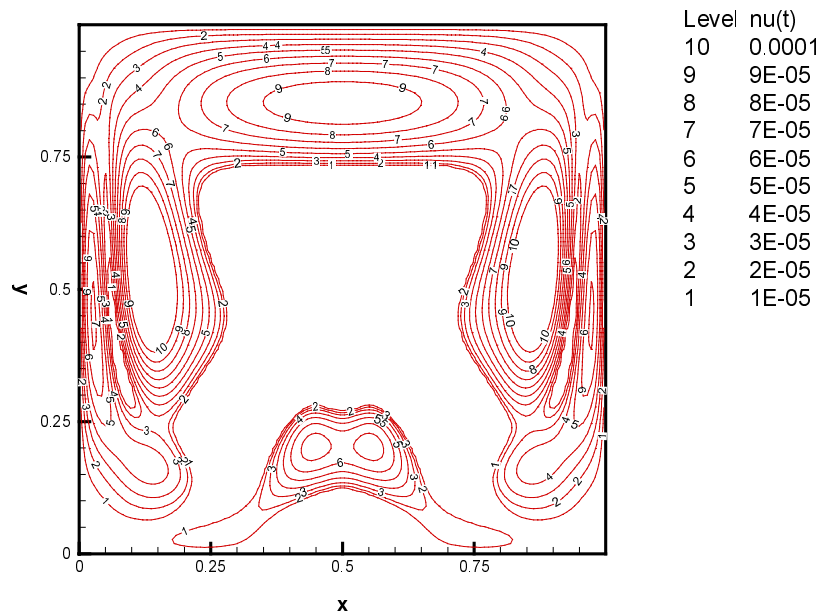


Slika 29: Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$.



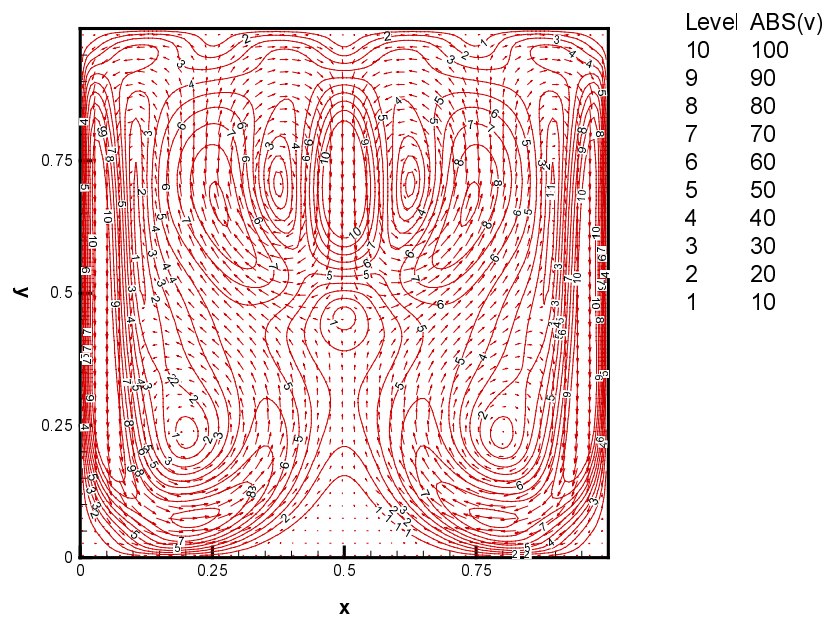
Slika 30: Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$.

Kljub temu, da je gibanje kapljevine popolnoma laminarno, vpeljuje nastavek (88) turbulentno viskoznost ν_t v enačbo prenosa gibalne količine (80), nastavek (83) pa turbulentno toplotna difuzivnost ν_t v enačbo prenosa toplotne energije (81). Slika 31 prikazuje polje brezdimenzijske turbulentne viskoznosti ν_t . Izračunane vrednosti so 3 rede velikosti manjše kot privzeto Prandtlovo število ($Pr = 0.25$) in ne vplivajo na termodinamično obnašanje sistema.

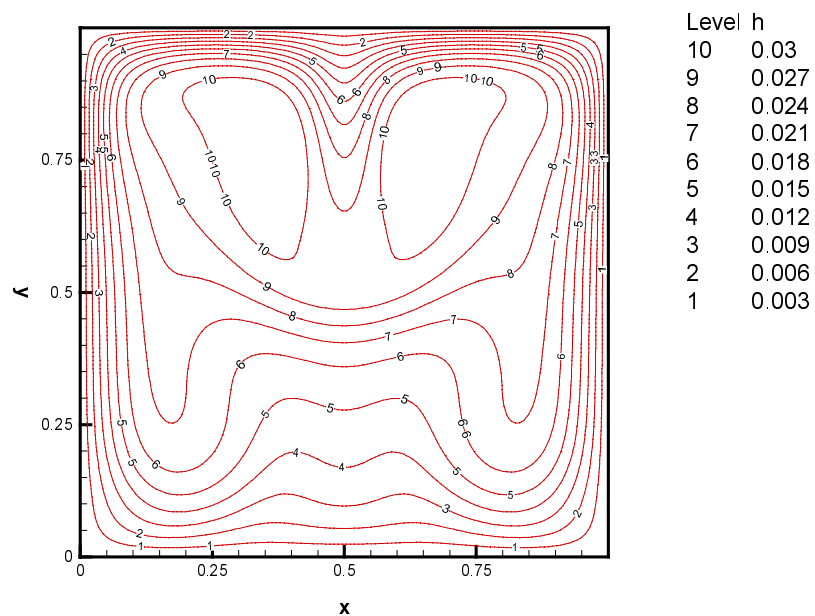


Slika 31: Polje turbulentne viskoznosti ν_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^7$ se v zgornji polovici simulacijskega območja pojavijo Rayleigh-Taylorjeve nestabilnosti, ki so posledica hlajenja kapljevine na zgornji steni. Te nestabilnosti so lepo vidne na izolinijah absolutne hitrosti na sliki 32. Njihova valovna dolžina je enaka 1/4 dolžine simulacijskega območja. Lokalne nestabilnosti se razvijejo v vertikalni vdor hladne kapljevine z zgornje stene proti jedru simulacijskega območja. Zaradi prisotnosti vertikalnih sten se vdor hladne kapljevine pojavi le v sredini simulacijskega območja. Vertikalni tok kapljevine je pri Rayleighovem številu $Ra = 10^7$ časovno stabilen in oblikuje 2 dodatna vrtinca v sredini zgornje polovice simulacijskega območja. Opisani proces je prav tako razviden na izotermah temperaturnega polja (slika 33).

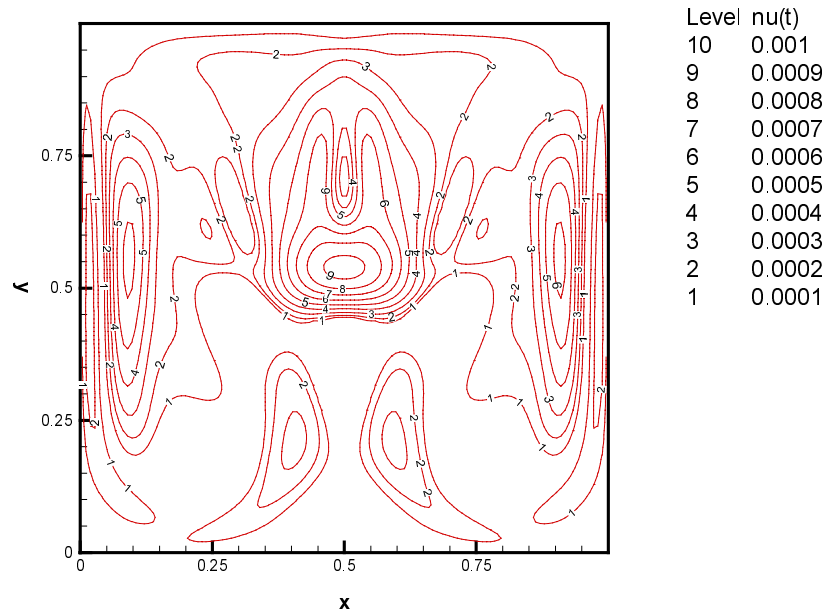


Slika 32: Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$.



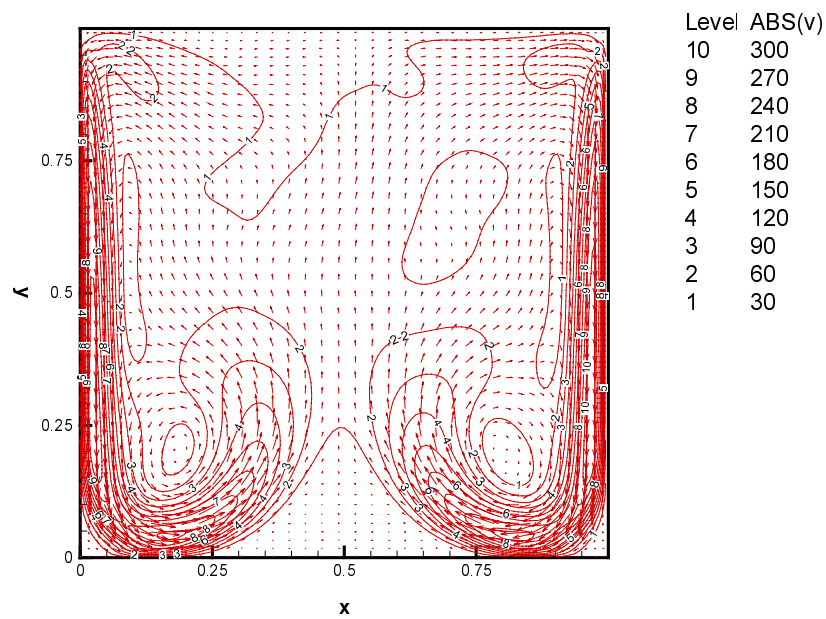
Slika 33: Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$.

Slika 34 prikazuje polje brezdimenzijske turbulentne viskoznosti ν_t . Izračunane vrednosti so 2 reda velikosti manjše kot privzeto Prandtlovo število ($Pr = 0.25$) in ne vplivajo na termodinamično obnašanje sistema.

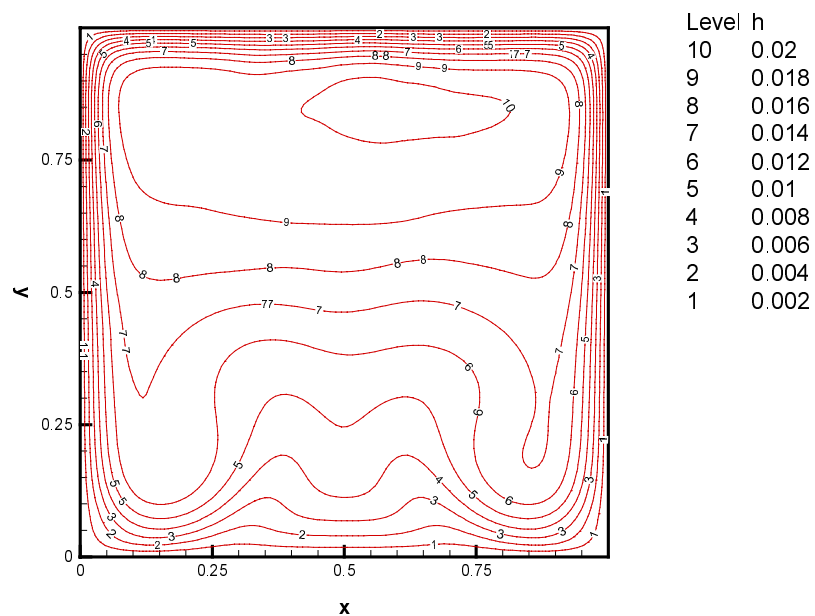


Slika 34: Polje turbulentne viskoznosti ν_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^8$ tok kapljevine ne doseže stacionarnega stanja po začetnem toplotnem prehodnem pojavu. Sistem preide v nihanje, kjer se izmenjujejo 3 različna stanja. Ta stanja so odvisna od kraja razvoja lokalne Rayleigh-Taylorjeve nestabilnosti v vertikalni vdor hladne kapljevine. Le-ta se sedaj pojavlja na 3 osrednjih mestih ($x = 0.25$, $x = 0.5$ in $x = 0.75$) ob zgornji steni simulacijskega območja (slika 32). Zaradi 3 diskretnih stanj, slika časovno povprečenega tokovnega polja (slika 35) ne kaže simetričnega cirkulacijskega vzorca. Čeprav ostaja osnovni cirkulacijski vzorec nespremenjen, pa časovno odvisni vdori hladne kapljevine proti jedru simulacijskega območja učinkovito mešajo tople in hladne tokove v zgornji polovici območja (slika 36). Zaradi tega je mogoče, glede na termodinamiko kapljevine, celotno simulacijsko območje razdeliti na spodnji del, kjer kapljevina ostaja toplotno razslojena in zgornji del, kjer se tokovno polje in prenos toplote oblikujejo pod vplivom časovno odvisnih nestabilnosti.

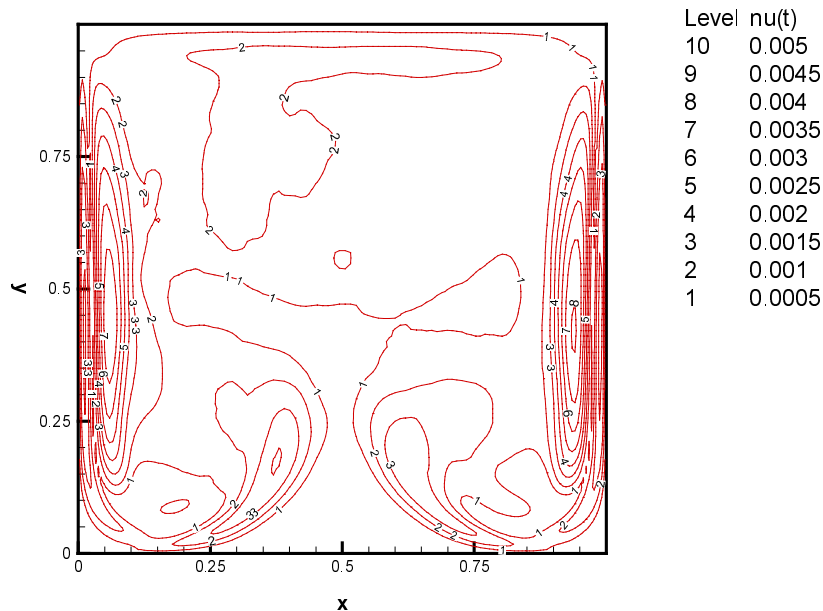


Slika 35: Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$.



Slika 36: Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$.

Slika 37 prikazuje polje brezdimenzijske turbulentne viskoznosti ν_t . Izračunane vrednosti so 2 reda velikosti manjše kot privzeto Prandtlovo število ($Pr = 0.25$) in prav tako ne vplivajo na termodinamično obnašanje sistema.

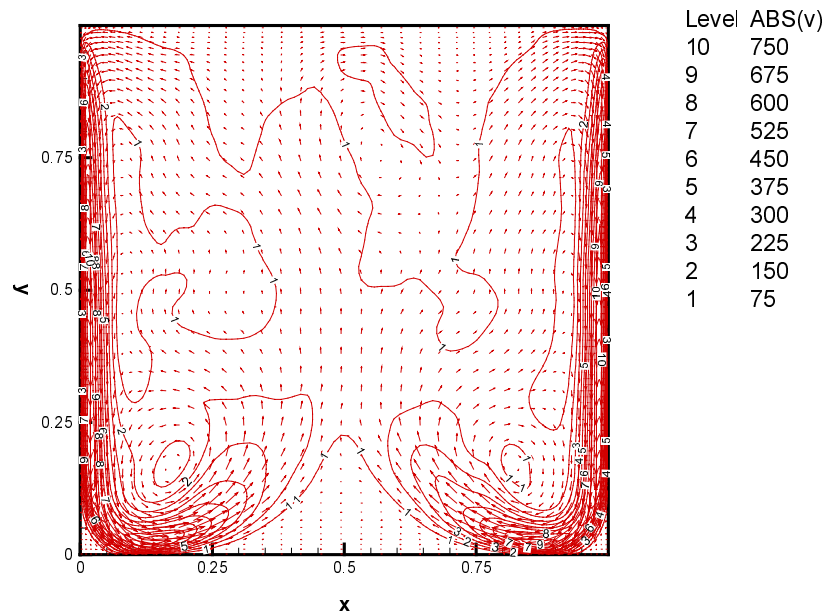


Slika 37: Polje turbulentne viskoznosti ν_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$.

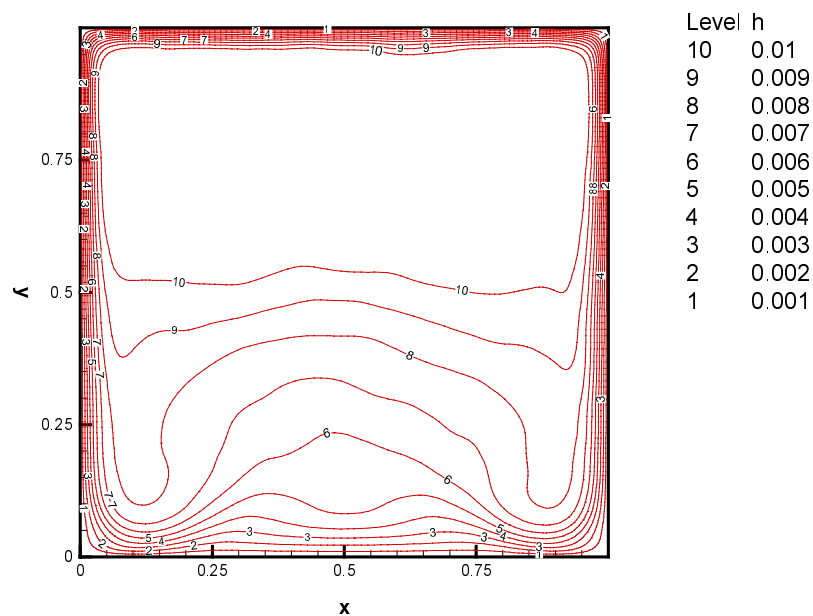
Pri nadaljnem povečanju Rayleighovega števila ($Ra > 10^8$) postane tok kapljevine nesimetričen s časovno odvisnimi vrtinci. Zaradi nestabilnosti in vdorov hladne kapljevine, ki se pojavljajo ob zgornji steni simulacijskega območja, nastopijo krajevno omejeni prehodi laminarnega toka v turbulentni tok. Le-ti vodijo s povečevanjem Rayleighovega števila v globalno spremembo tokovnega režima. Ta proces se kaže kot močno zmanjšanje skale gibanja kapljevine in povečanje turbulentne viskoznosti (slika 43).

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^9$ se povratni tok kapljevine in z njim povezana izmenjava toplote med zgornjim in spodnjim delom simulacijskega območja stisneta v zelo ozko in nestabilno plast ob vertikalnih stenah. Kot prikazuje slika 38, so tu hitrosti kapljevine najvišje.

Slika povprečenega temperaturnega polja (slika 39) kaže simulacijsko območje razdeljeno na zgornji del, ki je pod vplivom intenzivnega mešanja hladnih in dvigajočih se toplih tokov, in spodnji del, kjer je kapljevina toplotno razslojena, temperaturno polje pa simetrično.

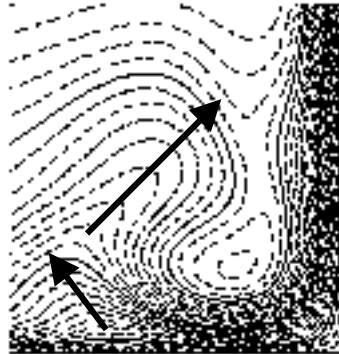


Slika 38: Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$.



Slika 39: Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$.

Vendar pa slike časovno povprečenih fizikalnih polj (slika 38 in 39) ne razkrivajo v celoti osnovnih mehanizmov, ki določajo termodinamiko obravnavanega sistema. Zaradi tega so na slikah 40, 41 in 42 prikazani trenutni krajevni izrezi temperaturnega polja po preteku začetnega toplotnega prehodnega pojava. Slika 40 tako prikazuje spodnji kot simulacijskega območja, kjer spuščajoči se tok zadene ob steno in dvigajoči se tok kapljevine. Tok kapljevine stisnjen ob vertikalno izotermno steno se namreč ohlaja, hitrost pa se mu povečuje. Njegova upočasnitev in preusmeritev v spodnjih kotih simulacijskega območja ima za posledico oblikovanje obeh osnovnih vrtincev cirkulacijskega vzorca toka kapljevine.



Slika 40: Temperaturno polje v spodnjih kotih (Horvat in sodelavci [80]).

Kot je bilo že omenjeno, se ob zgornji steni iz Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti razvijejo globoki vdori hladne kapljevine proti jedru simulacijskega območja (slika 41). Njihova lokacija in moč sta pri nižjih vrednostih Rayleighovega števila ($Ra < 10^9$) napovedljivi, pri Rayleighovem številu $Ra = 10^9$ pa postaneta kraj njihovega nastanka in njihova moč naključna. Kljub majhni kinetični energiji in časovni odvisnosti vertikalnih vdorov pa imajo le-ti odločilno vlogo pri destabilizaciji termodinamičnega obnašanja sistema.



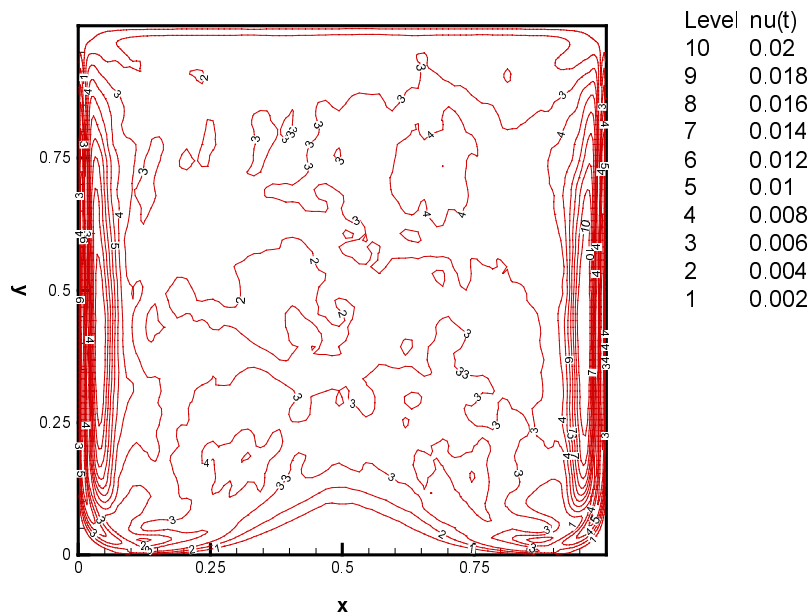
Slika 41: Razvoj Rayleigh-Taylorjeve nestabilnosti (Horvat in sodelavci [80]).

Pospeševanje hladnega toka kapljevine v plasti ob vertikalnih stenah ima za posledico velike strižne napetosti med hitro spuščajočim se hladnim tokom in počasnim toplim vzgonskim tokom. Pri zadostni motnji tlaka takšno stanje privede do razvitja Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti, kot jo prikazuje slika 42. Nestabilnosti te vrste se pojavljajo le v zgornji polovici simulacijskega območja, kjer je kapljevina ob steni hladnejša kot okolica, nastali dipol pa se zaradi vzgonskega toka okoliške kapljevine usmeri navzgor.



Slika 42: Pojav Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti (Horvat in sodelavci [80]).

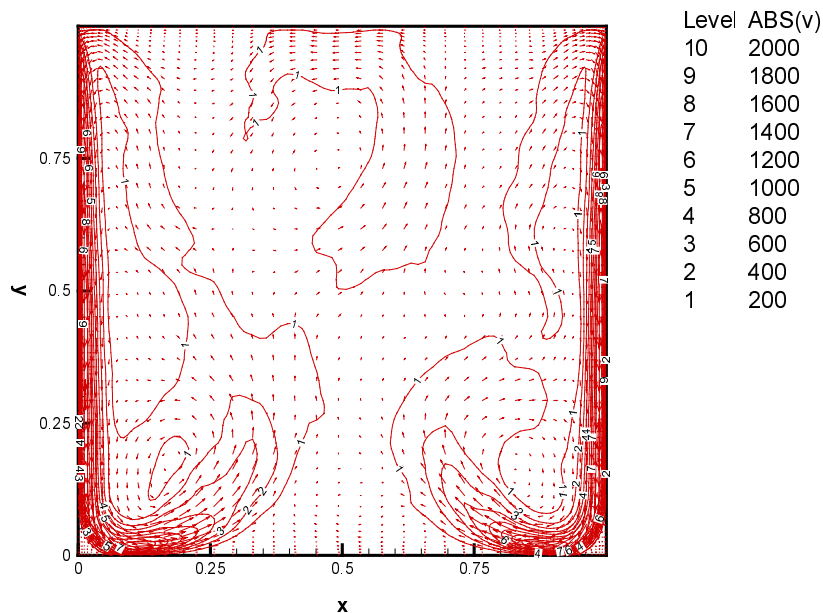
Slika 43 prikazuje polje brezdimenzijske turbulentne viskoznosti ν_t . Izračunane vrednosti znašajo 10 odstotkov privzetega Prandtlovega števila ($Pr = 0.25$) in so največje v območju strižnih napetosti med dvigajočim in spuščajočim se tokom ob vertikalnih stenah.



Slika 43: Polje turbulentne viskoznosti ν_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$.

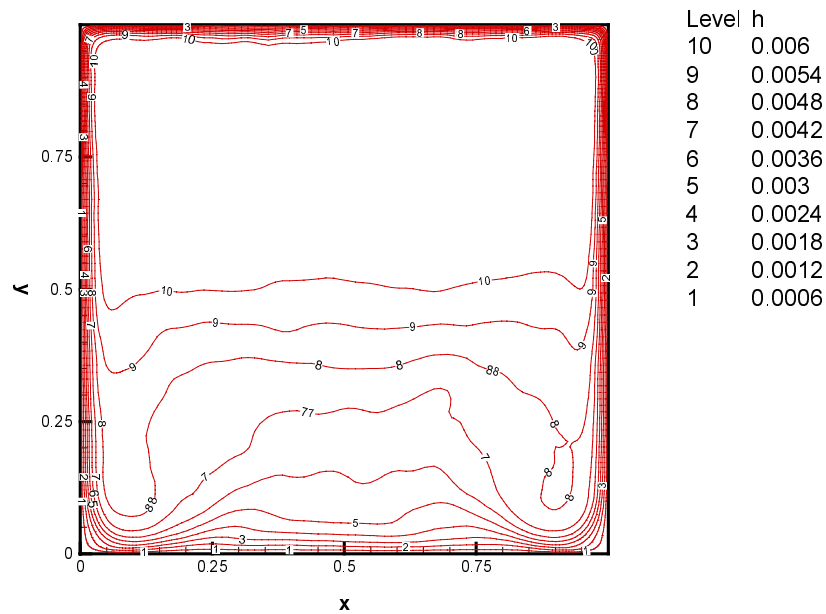
Kljub skromnim vrednostim turbulentne viskoznosti v opisanem primeru, ki bistveno ne vplivajo na končno podobo hitrostnega polja, pa ima le-ta pomembno vlogo pri zagotovitvi konsistentnosti numeričnega modela in posledično pri časovnem razvoju simuliranega sistema.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^{10}$ se že opisane smeri fizikalnega razvoja sistema nadaljujejo. Kot kaže slika 44, je tokovno polje organizirano v dvigajoči se osrednji tok in spuščajočo se ozko plast kapljevine ob vertikalnih stenah. Osrednji tok je zaradi Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti ob zgornji steni in Kelvin-Helmholtzovih nestabilnosti ob stranskih stenah neurejen z izmenjujočimi se področji laminarnega toka in razvite turbulence, medtem ko je tok ob vertikalnih stenah kljub Kelvin-Helmholtzovim nestabilnostim na njegovem robu neprekinjen. Ta tok je namreč edina transportna pot mase in gibalne količine iz zgornje v spodnjo polovico simulacijskega območja.



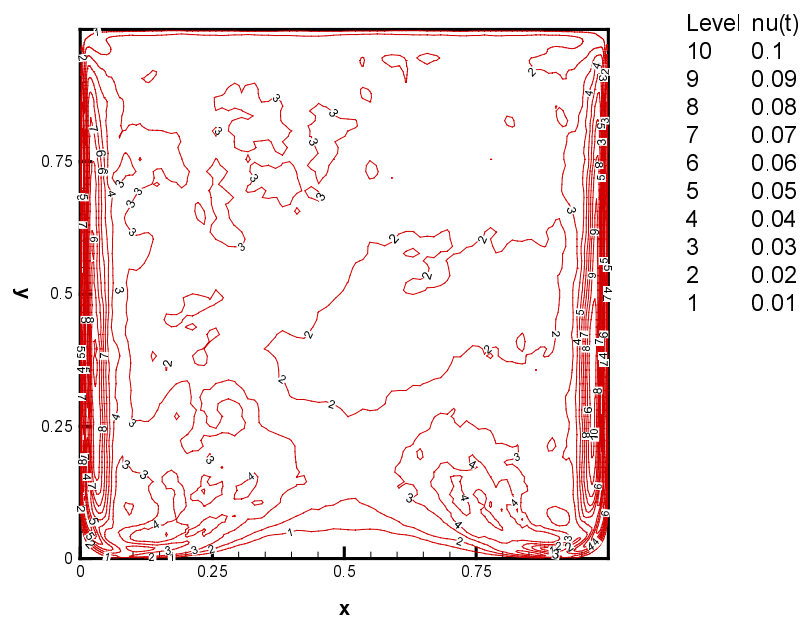
Slika 44: Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$.

Slika 45 prikazuje časovno povprečeno temperaturno polje, ki je razdeljeno na zgornji del z intenzivnim mešanjem in spodnji del, kjer je kapljevina toplotno razslojena. Iz primerjave temperaturnih polj pri Rayleighovih številih $Ra = 10^8$ (slika 36), $Ra = 10^9$ (slika 39) in $Ra = 10^{10}$ (slika 45) je mogoče opaziti, da se področje intenzivnega mešanja s povečevanjem Rayleighovega števila širi navzdol in zmanjšuje področje toplotne razslojenosti, simetrija med desno in levo polovico pa se pričenja lomiti.



Slika 45: Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$.

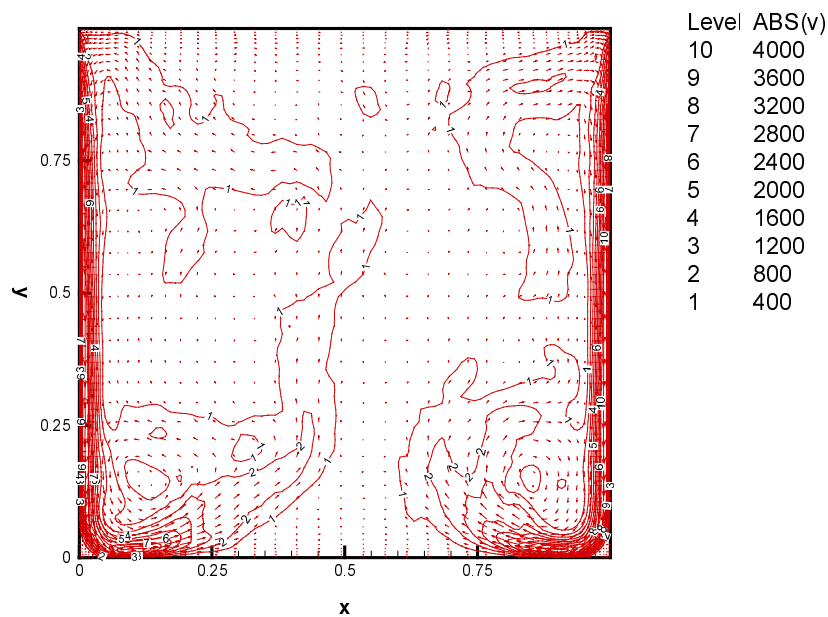
Polje turbulentne viskoznosti na sliki 46 kaže na zmanjševanje vpliva vrtincev v obeh spodnjih kotih. Turbulentna viskoznost je še vedno najvišja ob obeh vertikalnih stenah zaradi visokih strižnih napetosti.



Slika 46: Polje turbulentne viskoznosti ν_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$.

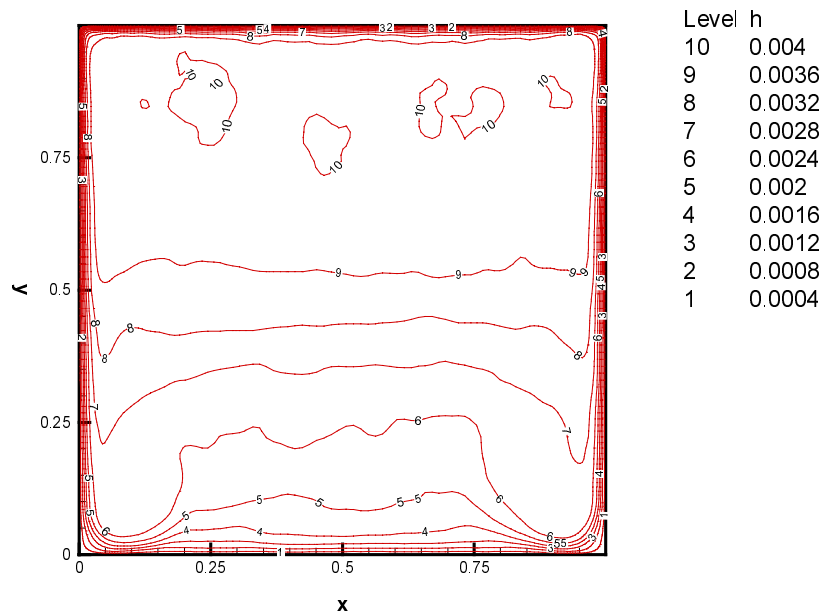
V osrednjem delu, kjer se stika toplotno razslojeno področje in področje intenzivnega mešanja, se pričinja izoblikovati področje turbulentne viskoznosti, ki ni posledica strižnih sil temveč lokalnih negativnih temperaturnih gradientov v vertikalni smeri.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^{11}$ (slika 47) Rayleigh-Taylorjeve nestabilnosti ob zgornji steni in Kelvin-Helmholtzove nestabilnosti ob vertikalnih stenah privedejo celoten simuliran sistem v stanje, brez stalnih tokovnih struktur. Medtem, ko, v primeru volumetrično grete plasti, prodrejo vdori hladne kapljevine, ki so posledica Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti, vse do dna, pa v primeru kotanje njihova moč oslabi v zgornji polovici simulacijskega območja. S povečanjem Rayleighovega števila se moč Kelvin-Helmholtzovih nestabilnosti ob vertikalnih stenah še poveča, njihova lokacija pa se širi proti dnu. Temperaturno polje na sliki 48 kaže, da postajajo izoterme v toplotno razslojenem delu simulacijskega področja vse bolj ploske. To je posledica horizontalnega konvekcijskega prenosa gibalne količine in toplotne energije, ki ima svoj izvor v Kelvin-Helmholtzovih nestabilnostih. Zaradi navedenih nestabilnosti, se večina toplotne in kinetične energije prenese iz tanke plasti ob vertikalnih stenah v časovno odvisne strukture v jedru simulacijskega območja.



Slika 47: Tokovno polje z izolinijami absolutne hitrosti, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$.

Opisano stanje je bolj razvidno na sliki 49, ki prikazuje trenutno temperaturno polje v spodnjem delu simulacijskega območja. Kljub temu, da se v levem in desnem kotu pojavljata dva vrtinca, ki sta posledica vračajočega se toka ob vertikalnih stenah, pa le-ta nista stalna. Njuna moč in lokacija se namreč spreminjata, kar destabilizira celoten spodnji del simulacijskega območja.

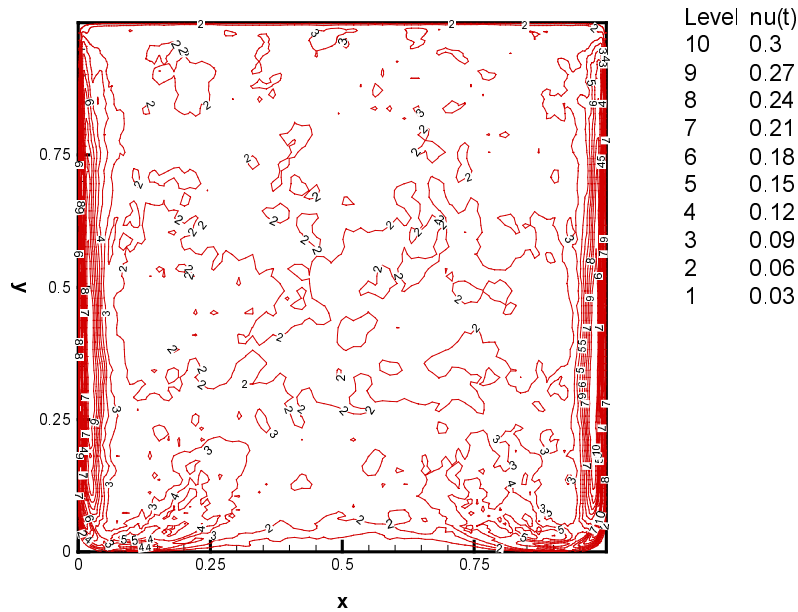


Slika 48: Temperaturno polje h , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$.



Slika 49: Nestabilno temperaturno polje ob spodnji steni (Horvat in sodelavci [80]).

Slika 50 prikazuje polje brezdimenzijske turbulentne viskoznosti ν_t . Izračunane vrednosti so enakega velikostnega razreda kot privzeto Prandtlovo število ($Pr = 0.25$) in odločilno vplivajo tako na razporeditev toka gibalne količine in toplotne energije kot na samo konsistentnost numeričnega modela. Razporeditev vrednosti turbulentne viskoznosti ν_t kaže na nadaljnje zmanjševanje vpliva vrtincev v obeh spodnjih kotih in na krepljenje turbulence kot posledice relaksacije nestabilnosti v osrednjem območju simuliranega sistema.



Slika 50: Polje turbulentne viskoznosti ν_t , $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$.

4.2 Lokalne porazdelitve časovno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila

Simulacija obnašanja kapljevine kot časovno odvisnega sistema omogoča, da realistično ocenimo koeficient prenosa toplote na stenah simulacijskega območja. V ta namen so bile izračunane lokalne porazdelitve časovnega povprečja brezdimenzijskega koeficienta prenosa toplote, to je Nusseltovega števila, po preteku začetnega toplotnega prehodnega pojava.

V primeru kapljevine z notranjo generacijo toplote je lokalno Nusseltovo število največkrat definirano kot:

$$Nu(t, r_{\partial\Omega}) = \frac{\partial_n \bar{h}(t, r_{\partial\Omega})}{\left(\langle \bar{h}(t) \rangle_{\Omega} - \langle \bar{h}(t) \rangle_{\partial\Omega} \right)} \quad (148)$$

Izhajajoč iz definicije (148) lahko njegovo časovno povprečje zapišemo kot:

$$\langle Nu(r_{\partial\Omega}) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_T Nu(t, r_{\partial\Omega}) dt. \quad (149)$$

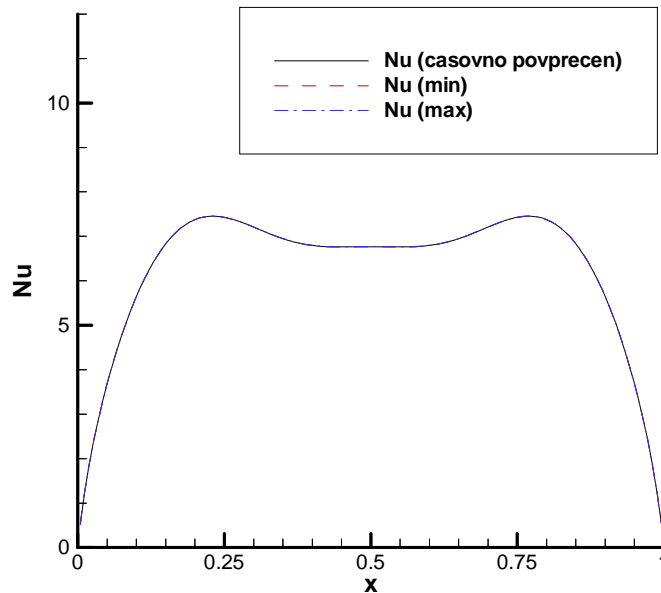
Časovno povprečenje je bilo v vseh simuliranih primerih izvedeno preko časovnega intervala dvakratne dolžine toplotnega prehodnega pojava oziroma preko več kot 10000 časovnih korakov. Pri tem je toplotni prehodni pojav definiran kot neravnovesje izvora toplotne energije z odtokom le-te skozi steno sistema.

Za lažjo razlago časovnega odstopanja lokalnih vrednosti Nusseltovega števila bodo skupaj s krajevnimi porazdelitvami časovno povprečenega Nusseltovega števila prikazane še njegove najnižje (150) in najvišje (151) vrednosti.

$$Nu(r_{\partial\Omega})_{min} = \min[Nu(t, r_{\partial\Omega})] \quad (150)$$

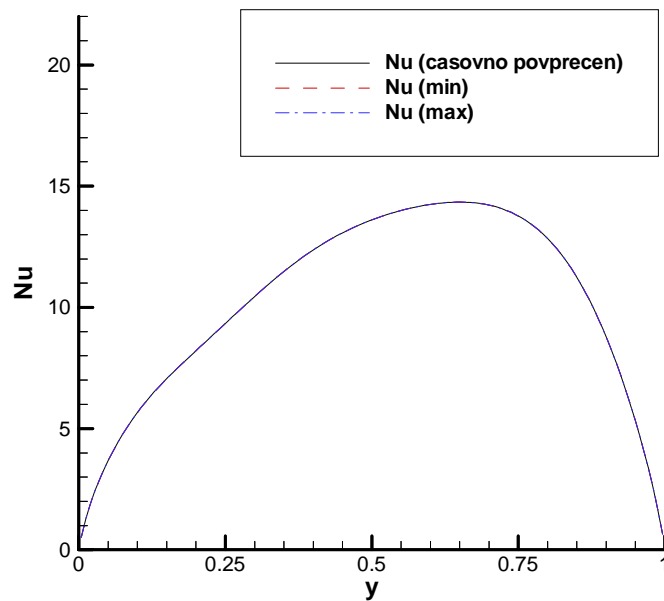
$$Nu(r_{\partial\Omega})_{max} = \max[Nu(t, r_{\partial\Omega})] \quad (151)$$

V splošnem Nusseltovo število narašča z naraščajočim Rayleighovim številom. Tako se Nusseltovega število v grobem podeseteri med Rayleighovima številoma $Ra = 10^6$ in $Ra = 10^{11}$. Nusseltovo število je nadalje najnižje na spodnji steni in narašča proti zgornji steni simulacijskega območja. Najvišjo lokalno vrednost doseže Nusseltovo število na vertikalnih stenah, v zgornjih kotih simulacijskega območja. Podobno visoke vrednosti je prav tako mogoče opaziti na krajevno omejenih delih zgornje stene.

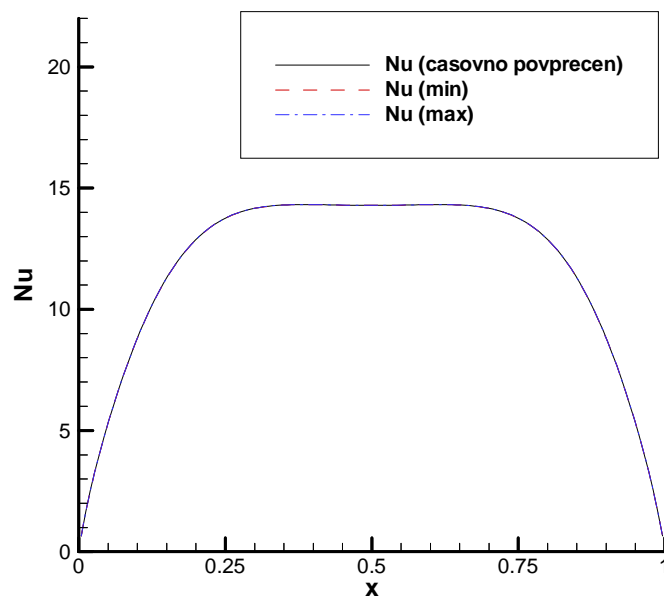


Slika 51: Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^6$ (slike 51-53) je gibanje kapljevine popolnoma stacionarno po začetnem toplotnem prehodnem pojavu. Zaradi tega ni vidnih razlik med lokalnimi porazdelitvami najnižjih, časovno povprečenih in najvišjih vrednosti Nusseltovega števila.



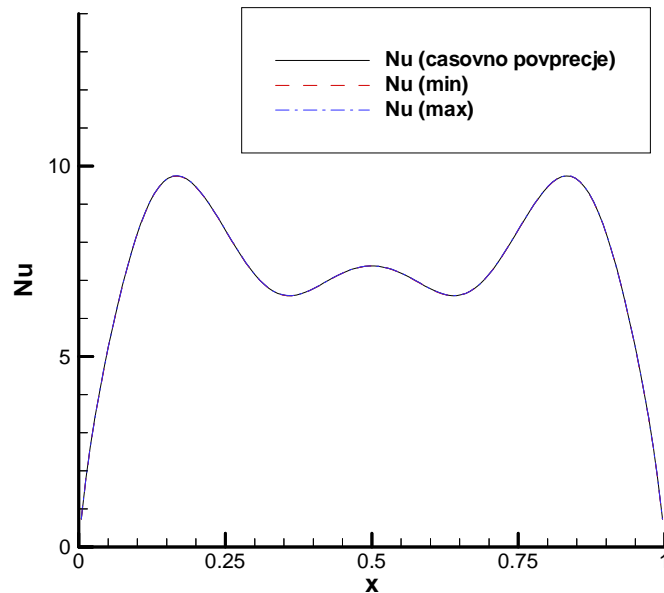
Slika 52: Razporeditev Nusseltovega števila na navpični steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$.



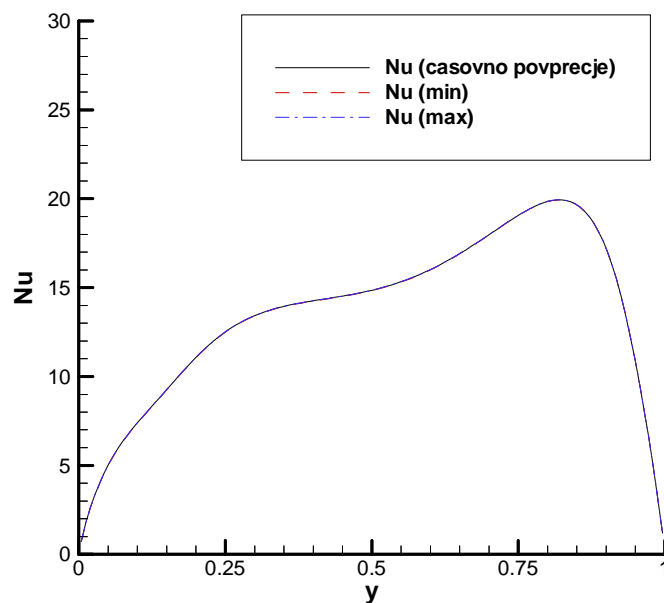
Slika 53: Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^7$ (slike 54-55) še vedno ni razlik med lokalnimi porazdelitvami najnižjih, časovno povprečenih in najvišjih vrednosti Nusseltovega števila, kar kaže na stabilnost simuliranega sistema. Slika 54 razkriva izboklini v lokalnih porazdelitvah Nusseltovega števila, kjer je prenos toplote skozi steno intenzivnejši. V spodnjih kotih

simulacijskega območja se Nusseltovo število namreč poveča zaradi vrtincev, ki jih povzroči vertikalno se spuščajoči tok ob stenah. Ta pojav lokalnega povišanja Nusseltovega števila na spodnji steni, ki so ga Nourgaliev in sodelavci [25] poimenovali v-fenomen, ni omejen le na kotanje pravokotne oblike ampak ga je prav tako mogoče opaziti v kotanjah okrogle in elipsaste oblike.

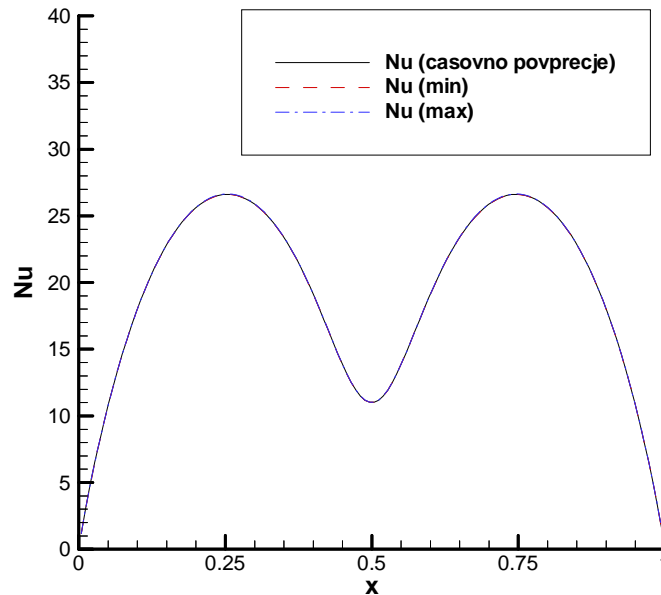


Slika 54: Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$.



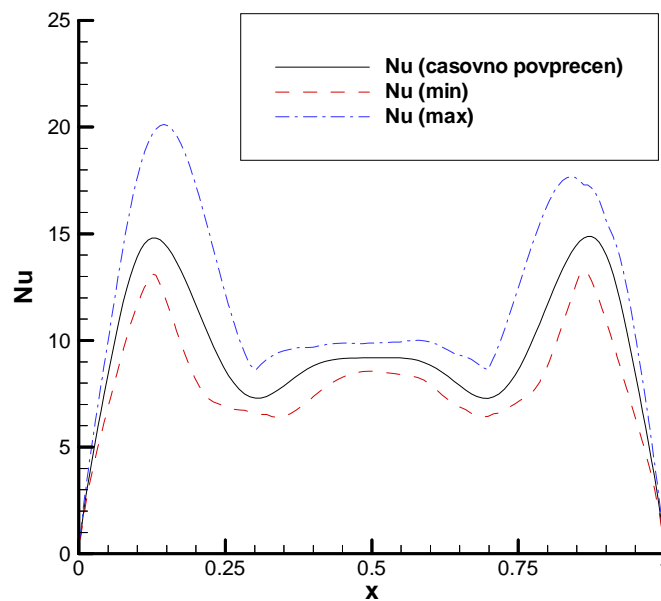
Slika 55: Razporeditev Nusseltovega števila na vertikalni steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$.

Na zgornji steni (slika 56) vboklina v lokalnih porazdelitvah Nusseltovega števila razkriva pojav vertikalnega vdora hladne kapljevine kot posledice Rayleigh-Taylorjeve nestabilnosti. Ta vdor hladne kapljevine ne spreminja svoje lokacije in moči s simulacijskim časom.



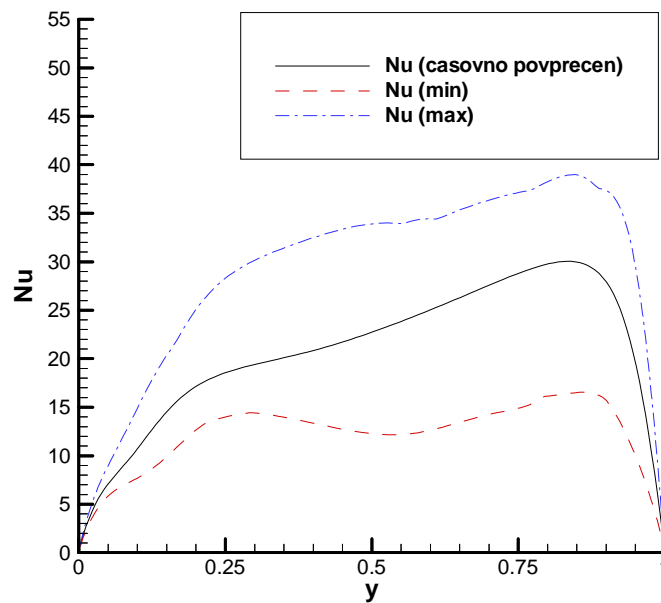
Slika 56: Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^8$ (slike 57-59) gibanje kapljevine več ne doseže stacionarnega stanja po preteku začetnega toplotnega prehodnega pojava. Sistem preide v periodično oscilirajoče stanje.

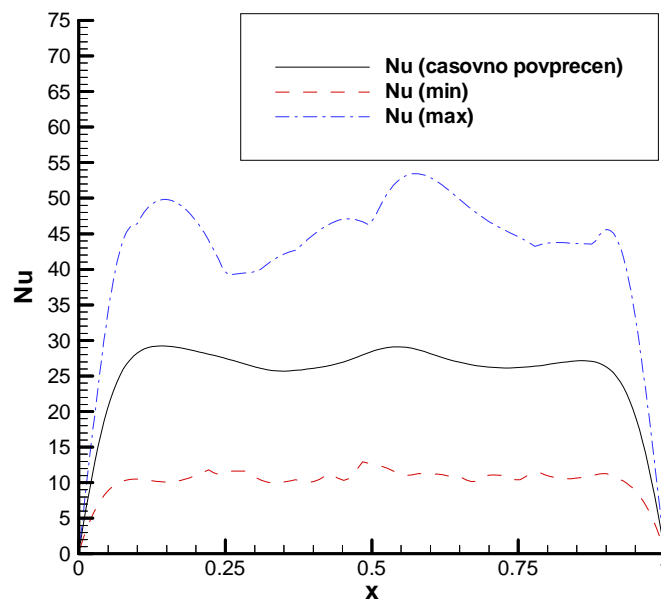


Slika 57: Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$.

Jasno je mogoče ločiti med lokalnimi porazdelitvami najnižjih, časovno povprečenih in najvišjih vrednosti Nusseltovega števila. Razlike med posameznimi lokalnimi porazdelitvami Nusseltovega števila so večje na vertikalnih in zgornji stenah, časovno povprečne vrednosti pa potekajo približno na sredini med najnižjimi in najvišjimi vrednostmi Nusseltovega števila. Na tem mestu velja omeniti, da višje Prandtlovo število stimulira neurejenost gibanja kapljevine, ko so pokazali Horvat in sodelavci [77].

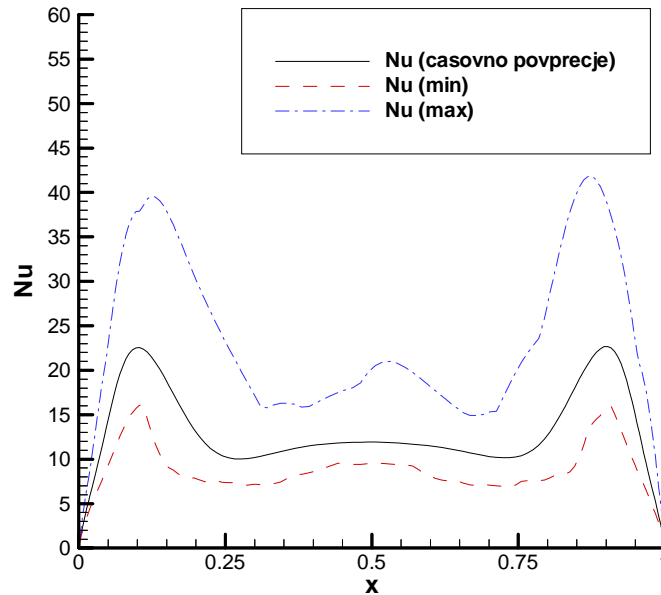


Slika 58: Razporeditev Nusseltovega števila na vertikalni steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$.

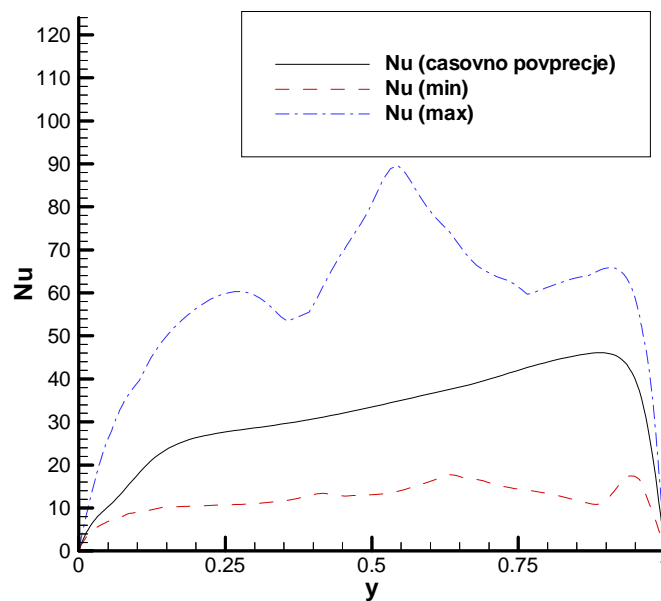


Slika 59: Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^9$ (slike 60-62) je obnašanje toka kapljevine v spodnjem delu simulacijskega območja še vedno časovno periodično. To potrjuje tudi simetrija lokalnih porazdelitev Nusseltovega števila na spodnji steni (slika 60).

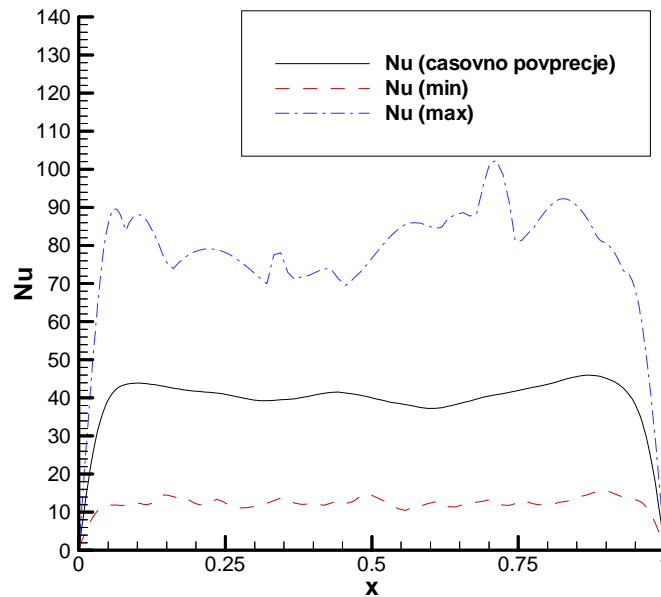


Slika 60: Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$.



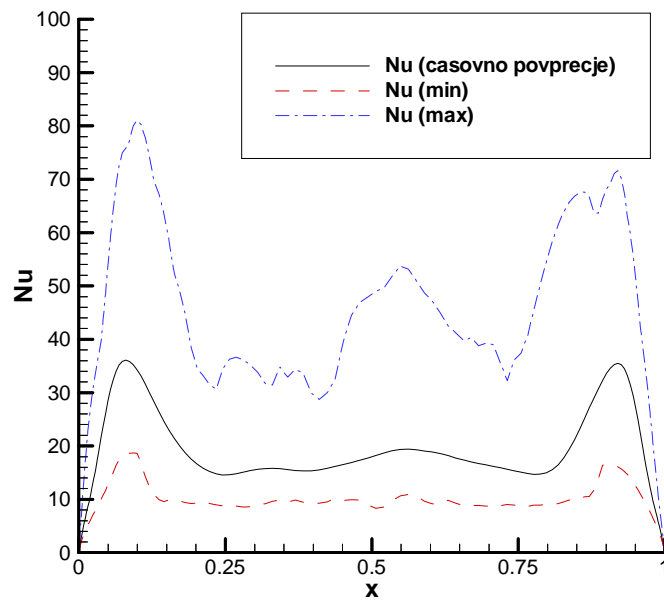
Slika 61: Razporeditev Nusseltovega števila na navpični steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$.

Zaradi pojavljanja neperiodičnih vdorov na zgornji steni, postane gibanje kapljevine v zgornjem delu simulacijskega območja neurejeno. Takšno obnašanje postavlja pod vprašaj smiselnost izračuna časovnega povprečja lokalnih porazdelitev Nusseltovega števila, saj je samo povprečje odvisno od uporabljenega časovnega intervala. Kljub temu, da bi bilo v primeru turbulentnega toka bolj primerno uporabljati izraz "časovno filtrirano Nusseltovo število" kot "časovno povprečeno Nusseltovo število", bom slednji izraz uporabljal še naprej, zaradi terminološke konsistentnosti samega dela.

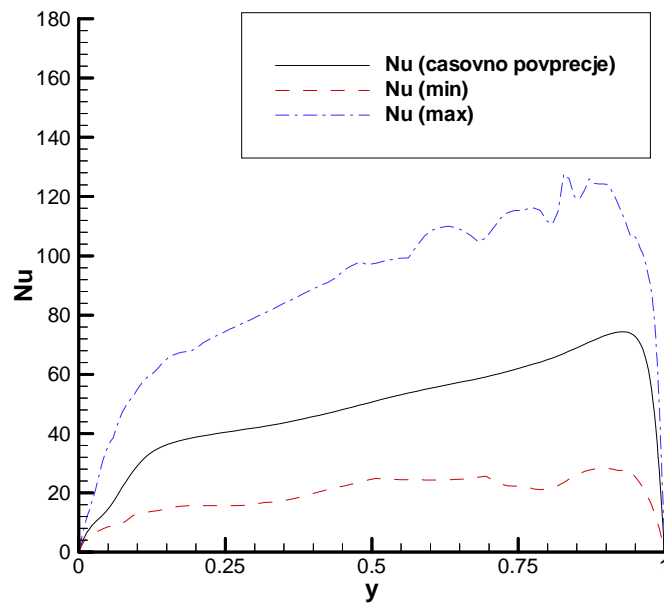


Slika 62: Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$.

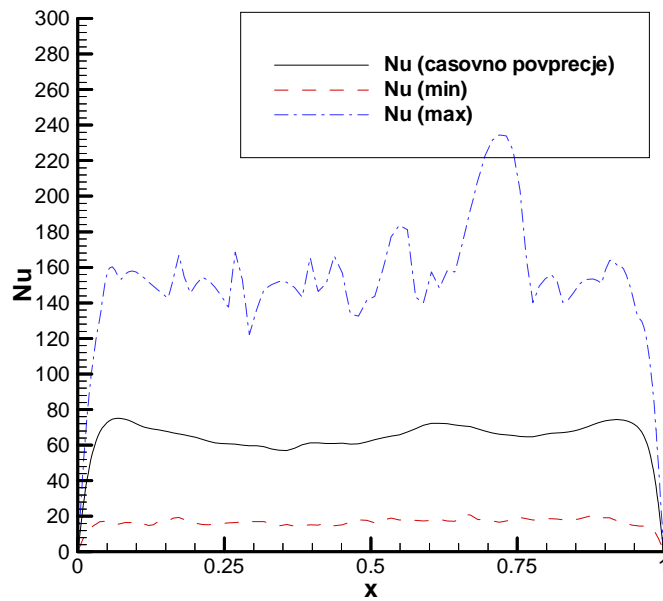
Pri Rayleighovem številu 10^{10} (slike 63-65) postane obnašanje toka kapljevine v spodnjem delu simulacijskega območja prav tako neurejeno. Na to kaže nesimetrija lokalne porazdelitve najvišjih vrednosti Nusseltovega števila na spodnji steni (63). Prav tako časovno povprečene vrednosti na spodnji in na zgornji steni ne potekajo več na sredini med najnižjimi in najvišjimi vrednostmi Nusseltovega števila. Lokalne porazdelitve najvišjih vrednosti Nusseltovega števila kažejo namreč velika odstopanja od časovno povprečenih vrednosti. Ta odstopanja so na spodnji steni posledica nestacionarnih vrtincev povratnega toka, na zgornji steni pa posledica Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti.



Slika 63: Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$.

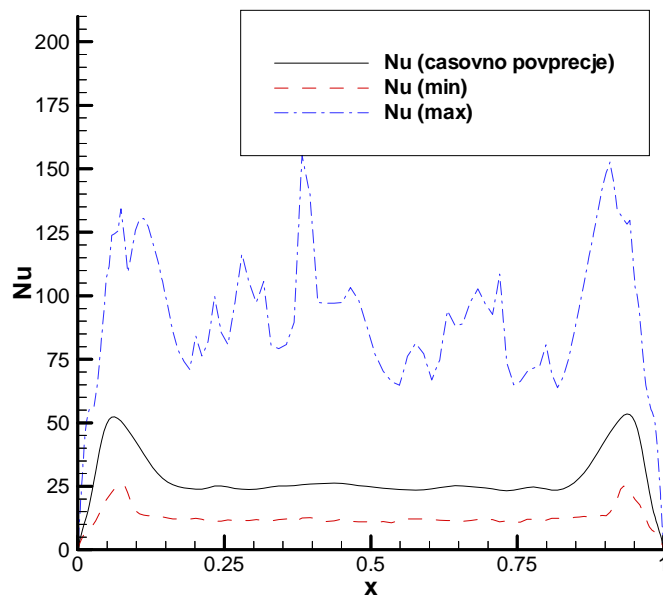


Slika 64: Razporeditev Nusseltovega števila na navpični steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$.

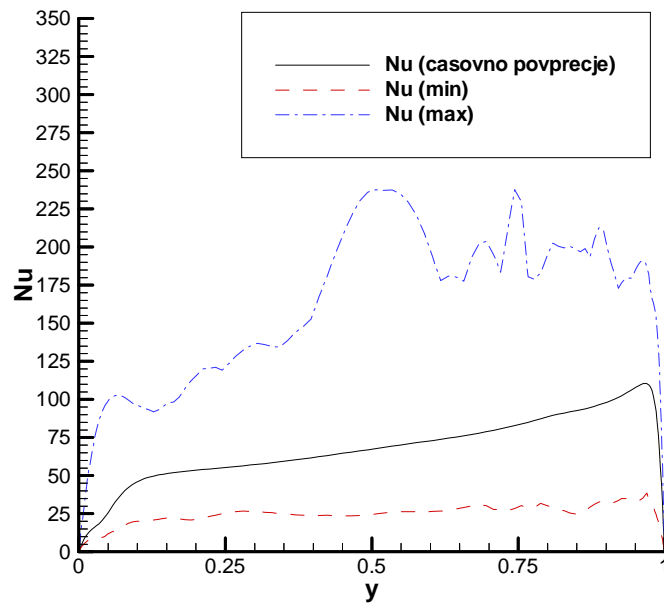


Slika 65: Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$.

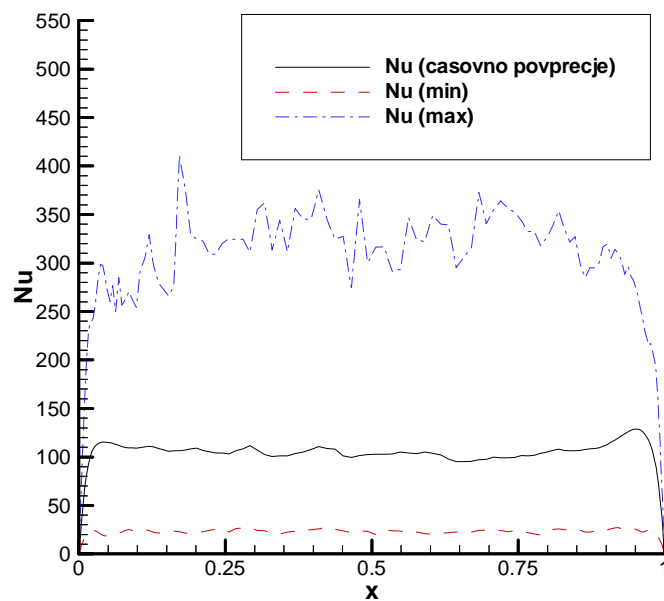
Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^{11}$ (slike 66-68) je obnašanje toka kapljevine neurejeno v celotnem simulacijskem območju. Kljub temu, da lokalne porazdelitve časovno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila obdržijo svojo začetno obliko, pa obstaja le šibka oblikovna povezanost časovno povprečenih vrednosti z najvišjimi vrednostmi Nusseltovega števila. To je rezultat časovne odvisnosti struktur toka ob stenah.



Slika 66: Razporeditev Nusseltovega števila na spodnji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$.



Slika 67: Razporeditev Nusseltovega števila na navpični steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$.



Slika 68: Razporeditev Nusseltovega števila na zgornji steni, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$.

Nesimetričnost razlik med lokalnimi porazdelitvami najnižjih, časovno povprečenih in najvišjih vrednosti Nusseltovega števila prav tako namiguje, da se funkcije porazdelitve vrednosti Nusseltovega števila bistveno razlikujejo od funkcije Gaussove porazdelitve. Zaradi tega podajanje časovno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila, kar je splošna inženirska praksa, ne daje zadostne informacije o toplotnih obremenitvah sten (Horvat in sodelavci [80]).

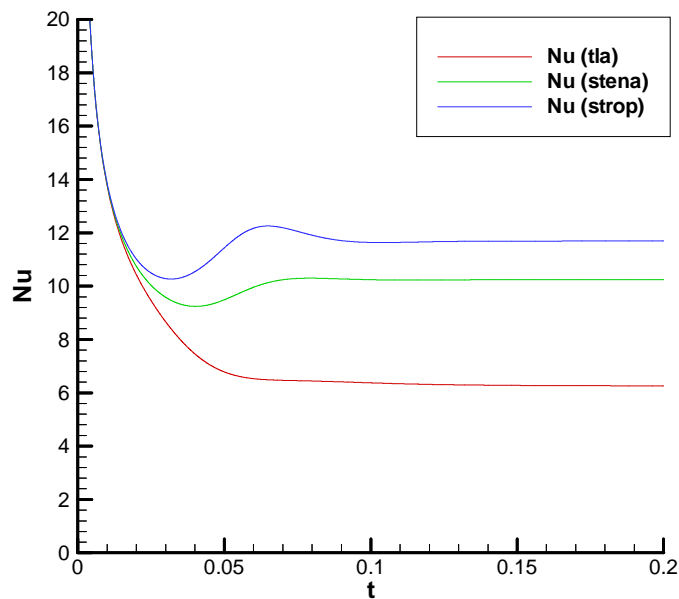
4.3 Časovne porazdelitve krajevno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila

Prehod simuliranega toka iz laminarnega v turbulentni režim je mogoče jasno identificirati s pomočjo časovnih porazdelitev krajevno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila na posameznih stenah. Le-te so definirane kot:

$$\langle Nu(t) \rangle_{\partial\Omega} = \frac{1}{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} Nu(t, r_{\partial\Omega}) dr \quad (152)$$

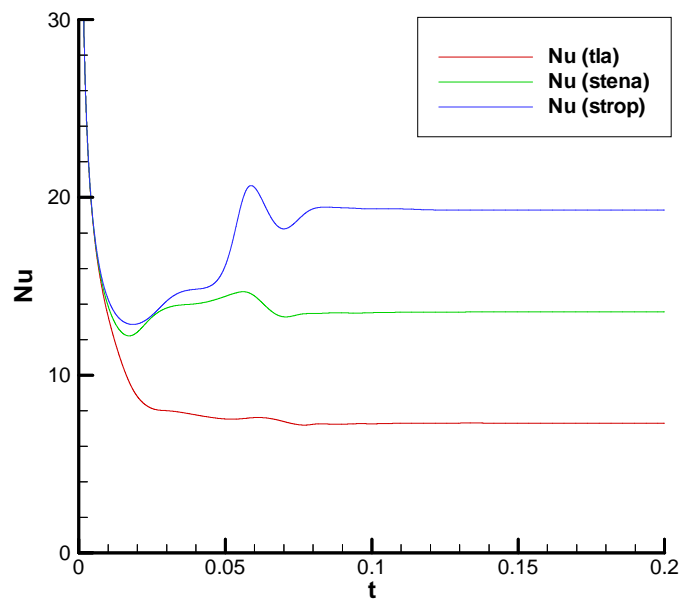
Krajevno povprečenje je bilo izvedeno preko 128 mrežnih točk na posamezni steni simulacijskega območja. Tako so bile izračunane 3 časovne porazdelitve krajevno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila, ki so podane na slikah 69-74. Nusseltovo število je definirano kot brezdimenzijski normaliziran temperaturni gradient (148) in je zato na začetku simulacije neskončno, saj je začetna temperatura simulacijskega območja $h = 0$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^6$ (slika 69) kažeta časovni porazdelitvi vrednosti Nusseltovega števila na vertikalni in zgornji steni prehod sistema preko 1. bifurkacijske točke pri $t = 0.05$. V tej točki, ki jo zaznamuje motnja v prikazanih časovnih porazdelitvah, se zaključi difuzijski režim prenosa toplote in v kapljevini se oblikujeta dva nasprotno usmerjena vrtinca. Po začetku konvekcijskega režima sistem hitro preide v ravnotežje in se ustali v stacionarnem stanju.



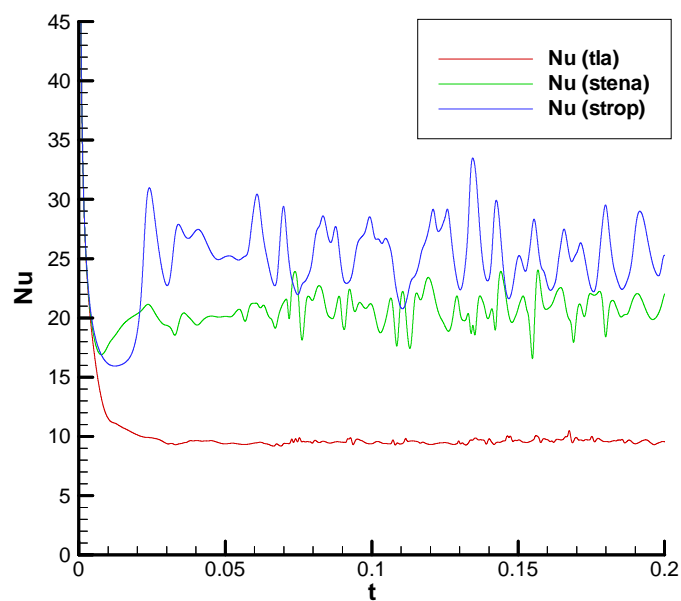
Slika 69: Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^6$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^7$ (slika 70) razkrivata časovni porazdelitvi vrednosti Nusseltovega števila na vertikalni in zgornji steni poleg prehoda 1. bifurkacijske točke pri $t = 0.02$ tudi nastop vertikalnega vdora hladne kapljevine kot posledice Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti na zgornji steni. Pojav vdora in oblikovanje dodatnega dipola vrtincev je mogoče zaznati kot 2. motnjo pri $t = 0.06$.



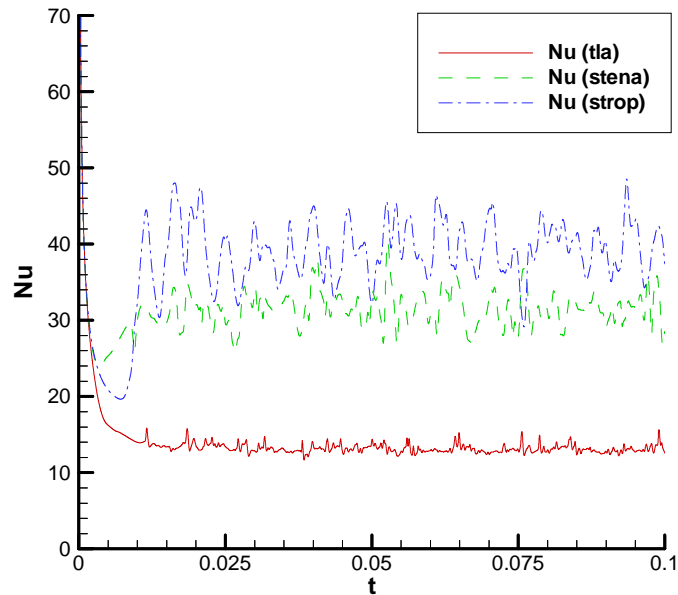
Slika 70: Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^7$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^8$ (slika 71) kažeta časovni porazdelitvi vrednosti Nusseltovega števila na vertikalni in zgornji steni oscilirajoče obnašanje s skoraj enakomerno frekvenco, kar daje slutiti bližino 2. bifurkacijske točke in prehod v neurejeno gibanje. Kljub temu pa časovna porazdelitev Nusseltovega števila na spodnji steni doseže stacionarno stanje kmalu po začetnem toplotnem prehodnem pojavu in ostane nato časovno nespremenljiva .

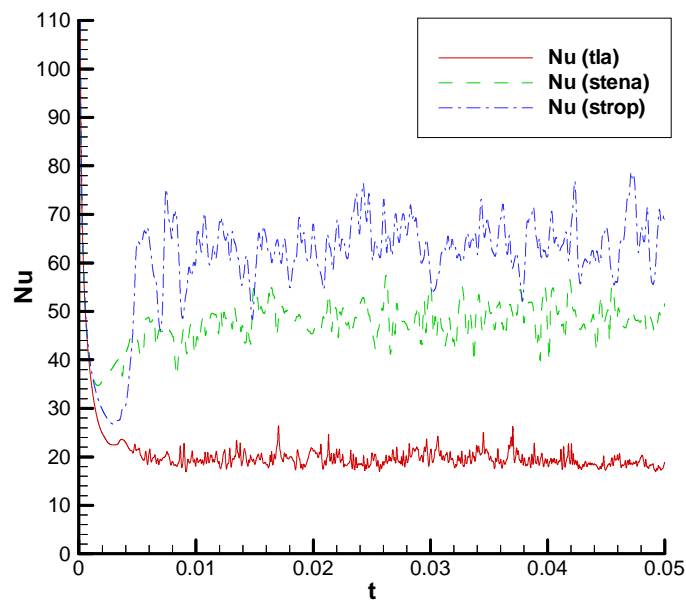


Slika 71: Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^8$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^9$ (slika 72) razkrivajo neenakomerne časovne porazdelitve vrednosti Nusseltovega števila neurejeno naravo toka kapljevine v kotanji in časovno neenakomernost prenosa toplote, posebno še na zgornji in vertikalni steni. Skromne motnje v časovnem poteku vrednosti Nusseltovega števila so opazne prav tako na spodnji steni, kar kaže na pričetek destabilizacije spodnjega dela simulacijskega območja.



Slika 72: Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^9$.

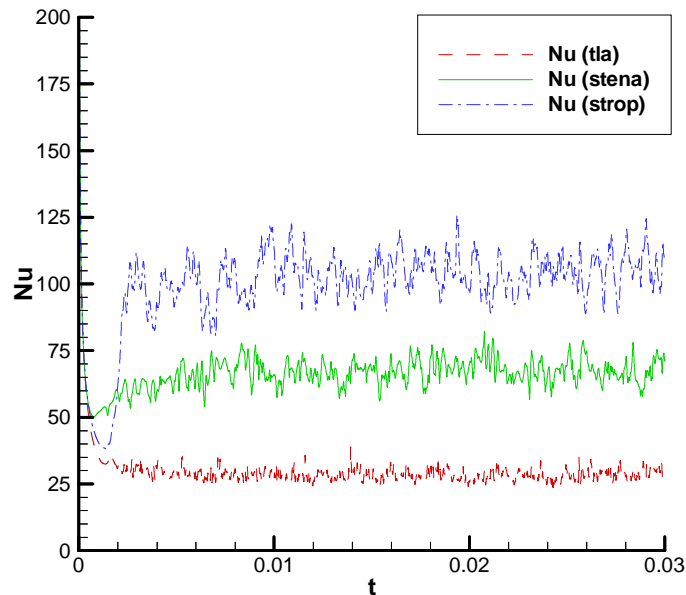


Slika 73: Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{10}$.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^{10}$ (slika 73) krivulje časovnih porazdelitev vrednosti Nusseltovega števila neurejeno nihajo, časovne amplitude pa s povečanjem Rayleighovega števila rastejo. Ker vdori vertikalne hladne kapljevine ob zgornji steni učinkovito mešajo zgornji del simulacijskega območja in s tem znižujejo toplotno obremenjenost zgornje stene, se časovna porazdelitev vrednosti Nusseltovega števila na vertikalni steni približuje le-tej na zgornji steni.

Pri Rayleighovem številu $Ra = 10^{11}$ (slika 74) neurejeno nihanje časovnih porazdelitev vrednosti Nusseltovega števila razkriva turbulentno dinamiko kapljevine v kotanji. Poleg Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti ob zgornji steni simulacijskega območja, razvoj Kelvin-Helmholtzovih nestabilnosti na celotni dolžini vertikalne stene sedaj občutno znižuje vrednosti Nusseltovega števila tudi ob vertikalnih stenah. Prenos toplote na stenah je tako bistveno odvisen od časovno neenakomernih in neurejenih struktur toka.

Primerjalne vrednosti za adiabatno zgornjo steno, kjer nestabilnosti ni opaziti, so objavili Horvat in sodelavci [57].



Slika 74: Časovne porazdelitve Nusseltovega števila na stenah, $Pr = 0.25$, $Ra = 10^{11}$.

4.4 Časovno in krajevno povprečene vrednosti Nusseltovega števila

Večina avtorjev je svoje rezultate objavila le v obliki časovno in krajevno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila (153), ki so tako edina oblika rezultatov s katerimi lahko primerjam vrednosti lastnih izračunov. Da bi bila ta primerjava mogoča, so bile vrednosti Nusseltovega števila krajevno povprečene preko 128 mrežnih točk na posamezni steni simulacijskega območja in nato časovno povprečene preko več kot 10000 simulacijskih časovnih korakov.

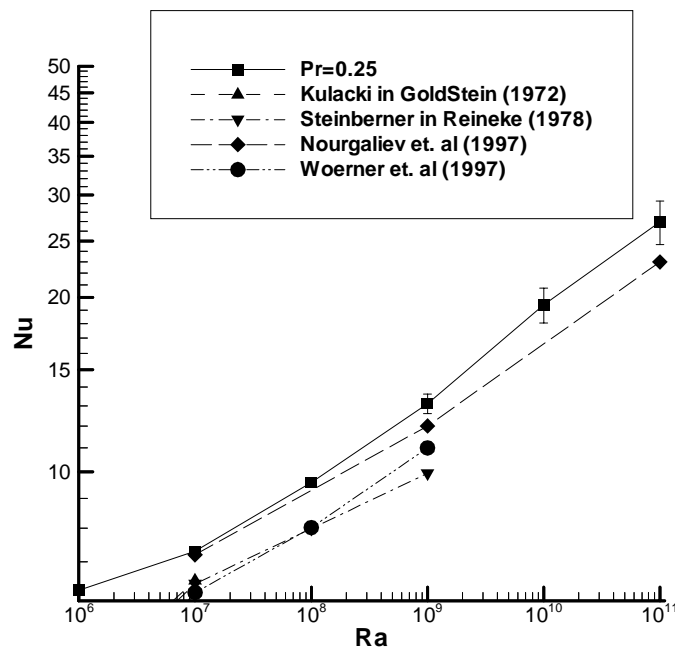
$$\langle Nu \rangle_{T, \partial\Omega} = \frac{1}{\partial\Omega} \frac{1}{T} \int \int_{\partial\Omega} Nu(t, r_{\partial\Omega}) dt dr . \quad (153)$$

Na slikah 75-77 so prikazane funkcije časovno-krajevno povprečenega Nusseltovega števila v odvisnosti od vrednosti Rayleighovega števila v \log_{10} - \log_{10} diagramu. Zraven povprečenih vrednosti so prikazane še standardne deviacije rezultatov (154).

$$\sigma_{T,\partial\Omega} = \sqrt{\frac{1}{\partial\Omega} \frac{1}{T} \iint_{\partial\Omega} (Nu(t,r) - \langle Nu \rangle_{T,\partial\Omega})^2 dt dr} . \quad (154)$$

Izračunane vrednosti so primerjane z rezultati, ki so jih objavili Kulacki in Goldstein [16], Steinberner in Reineke [20], Nourgaliev in sodelavci [25] in Wörner in sodelavci [54]. V splošnem se izračunane vrednosti ujemajo z že objavljenimi rezultati. Prikazana odstopanja nastopajo zaradi razlike v geometriji simulacijskega območja, kot v primeru rezultatov, ki so jih objavili Kulacki in Goldstein [16] in Wörner in sodelavci [54]. Visoka Prandtlova števila kapljevine so drugi razlog za odstopanje vrednosti Nusseltovih števil, kot v primeru rezultatov, ki sta jih objavila Steinberner in Reineke [20].

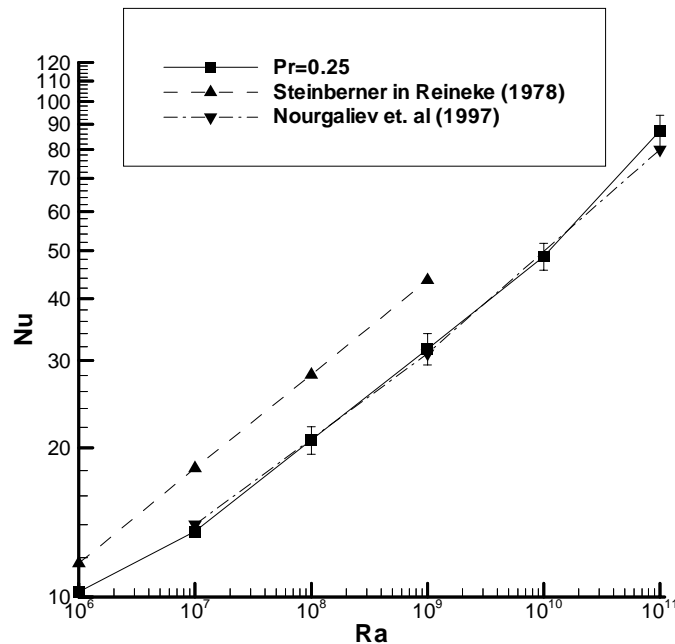
Zdi se, da je v strokovnih krogih splošno sprejeto, da je odvisnost Nusseltovega števila od Rayleighovega števila linearna v \log_{10} - \log_{10} diagramu in, da Prandtlovo število ne vpliva na povprečno vrednost Nusseltovega števila, kot trdijo npr. Theofanous in sodelavci [14]. Izračunane vrednosti prikazane na slikah 75-77, kakor tudi rezultati, ki so jih objavili Horvat in sodelavci [77], kažejo, da je obnašanje časovno-krajevno povprečenega Nusseltovega števila mnogo bolj zapleteno.



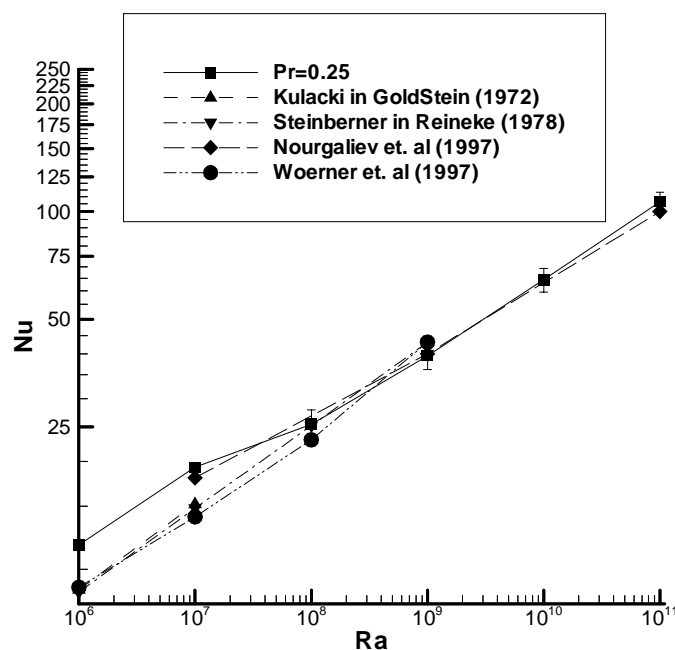
Slika 75: Funkcijska odvisnost Nusseltovega števila od Rayleighovega števila na spodnji steni simulacijskega področja.

Na spodnji meji simulacijskega območja (slika 75) ima izračunana funkcijska odvisnost med Rayleighovim in Nusseltovim številom parabolično obliko. Le ta je bolj izrazita pri višjih vrednostih Prandtlovega števila, kot so že pokazali Horvat in sodelavci [77]. Parabolična oblika funkcijske odvisnosti razkriva, da se v obravnavanem območju Rayleighovega števila

$Ra = 10^6$ - 10^{11} Nusseltovo število spreminja hitreje z večanjem Rayleighovega števila. Prav tako na vertikalnih stenah (slika 76) funkcijska odvisnost med Rayleighovim in Nusseltovim številom ni popolnoma linearna, standardna deviacija rezultatov pa narašča s povečevanjem Rayleighovega števila.



Slika 76: Funkcijska odvisnost Nusseltovega števila od Rayleighovega števila na navpični steni simulacijskega področja.



Slika 77: Funkcijska odvisnost Nusseltovega števila od Rayleighovega števila na zgornji steni simulacijskega področja.

Na diagramu (slika 77), ki prikazuje funkcijsko odvisnost Rayleighovega in Nusseltovega števila za zgornjo steno, je mogoče opaziti 3 ločena področja in sicer v naslednjih intervalih vrednosti Rayleighovega števila: $Ra = 10^6-10^7$, 10^7-10^8 in 10^8-10^{11} . Znotraj posameznih intervalov so funkcijske odvisnosti Rayleighovega in Nusseltovega števila premice z različnimi nakloni. Začetnemu laminarnemu področju v intervalu vrednosti Rayleighovega števila $Ra = 10^6-10^7$ sledi območje prehoda, kjer se hitrost poviševanja Nusseltovega števila upočasni. Ko tokovni režim postane turbulenten ($Ra > 10^8$), se nagib Rayleigh-Nusseltove odvisnosti ponovno poveča. Na ta način funkcijska odvisnost vrednosti Rayleighovega in Nusseltovega števila razkriva postopen prehod med laminarnim in turbulentnim tokovnim režimom, ko postaja prenos toplote na stenah simulacijskega območja vse bolj nestacionaren in neurejen. Zanimivo je prav tako, da se standardna deviacija izračunanih vrednosti Nusseltovega števila v turbulentnem režimu zmanjša kljub povečevanju Rayleighovega števila.

Primerjava časovno-krajevno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila na spodnji, vertikalni in navpični steni kaže, da je povprečen prenos toplote najvišji na zgornji in najnižji na spodnji steni. V povprečju tako, zaradi naravne konvekcije, 48 odstotkov toplotne energije obremenjuje stene spodnjega plenuma, ostanek pa se vrača nazaj v reaktorsko posodo. Izračunane vrednosti Nusseltovega števila tako podajajo zgornjo mejo toplotne obremenitve reaktorske tlačne posode. V izračun namreč ni bilo vključeno toplotno sevanje, ki pa povečuje delež toplote vrnjene v poškodovano reaktorsko sredico in na ta način zmanjšuje toplotno obremenitev sten reaktorske posode.

5. Zaključki

Doktorsko delo predstavlja prispevek k modeliranju turbulentne naravne konvekcije. V delu je razširjena in preverjena metoda simulacije velikih vrtincev za primere vzgonskih tokov v kapljevinah z notranjo generacijo toplote. Delo prav tako omogoča napovedovanje toplotne obremenjenosti sten spodnjega plenuma v razmerah težke nesreče v jedrskem reaktorju.

V okviru doktorskega dela je bil postavljen teoretični model naravne konvekcije v volumetrično greti kapljevini. Na osnovi fizikalnega modela razvit numerični program omogoča simulacijo obnašanja kapljevine pod vplivom notranje generacije toplote. Pojav turbulence je zajet z modificirano metodo simulacije velikih vrtincev, ki temelji na modelu Smagorinskega. Da bi se zagotovila konsistentnost numerične sheme in izvedenih simulacij, je bila opravljena dimenzijska analiza prenosa gibalne količine in toplotne energije.

Testiranje fizikalnega modela naravne konvekcije in uporabljene numerične sheme je bilo izvedeno na priznanih standardnih termohidravličnih primerih. Izračuni kažejo dobro ujemanje z rezultati Ghie in sodelavcev [71], Rahmana in sodelavcev [73], Hanjalića in sodelavcev [72] in Wörnerja in sodelavcev [76]. To potrjuje pravilnost uporabe razvitega modela simulacije velikih vrtincev za simulacijo turbulence v vzgonskih tokovih.

Z razvitim programom so bile opravljene dvorazsežne časovno odvisne simulacije naravne konvekcije v pravokotni kotanji pri Rayleighovih številih $Ra = 10^6$ - 10^{11} in pri Prandtlovem številu $Pr = 0.25$, kar ustreza razmeram v spodnjem plenumu reaktorske posode ob težki nesreči. Namen simulacij je bila raziskava dinamike vrednosti Nusseltovega števila. To je omogočilo identifikacijo vpliva različnih mehanizmov na prenos toplote skozi stene sistema.

Simulacije kažejo, da simulirani sistem doseže stacionarno stanje po preteku začetnega toplotnega prehodnega pojava pri Rayleighovih številih $Ra = 10^6$ - 10^7 . V okolici Rayleighovega števila $Ra = 10^8$ preide simulirani sistem v oscilirajoče stanje, ki je posledica Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti na zgornji steni. Pri Rayleighovem številu $Ra > 10^8$ pride do pojava Kelvin-Helmholtzovih nestabilnosti ob vertikalnih stenah simulacijskega območja, gibanje kapljevine pa postane neurejeno. Povečevanje vpliva časovno odvisnih struktur toka vodi do turbulentnega tokovnega režima. Turbulenca se najprej pojavi lokalno v zgornjem delu simulirane kotanje zaradi pojava Rayleigh-Taylorjevih nestabilnosti. Pri tem gibanje kapljevine v spodnjem delu ostane v laminarnem tokovnem režimu. Globalno se turbulentni tokovni režim pojavi šele pri Rayleighovem številu $Ra = 10^{11}$.

Na osnovi izvedenih simulacij so bile izračunane krajevne porazdelitve časovno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila na stenah kotanje v laminarnem, prehodnem in turbulentnem režimu, kar določa lokalne razporeditve toplotne obremenjenosti sten kotanje. Krajevne porazdelitve Nusseltovega števila razkrivajo dinamiko prenosa toplote na stenah, ki je posledica tokovnih vzorcev kapljevine. Tako je prenos toplote najvišji v zgornjih kotih simulacijskega območja. V laminarnem režimu pri Rayleighovih številih $Ra = 10^6$ - 10^7 je višina prenosa toplote enako visoka tudi na zgornji steni. Pri nastopu turbulentnega režima pri Rayleighovih številih $Ra > 10^8$ pa se delež toplote prenešene skozi zgornjo steno zmanjša, zaradi vertikalnih vdorov hladne kapljevine ob zgornji steni.

Izračunane časovne porazdelitve krajevno povprečenega Nusseltovega števila dajejo vpogled v dinamiko toka in prenosa toplote v pravokotni kotanji. Z njihovo pomočjo je bilo mogoče določiti čas nastopa 1. bifurkacijske točke, kjer se konča difuzijski in se prične

konvekcijski režim prenosa toplote. Časovne distribucije krajevno povprečenih vrednosti Nusseltovega števila prav tako razkrivajo časovno odvisnost oziroma periodičnost večjih cirkulacijskih vzorcev. Tako je iz analize periodičnih časovnih distribucij pri Rayleighovem številu $Ra = 10^8$ mogoče razbrati cikličnost vdorov hladne kapljevine, kar kaže na bližino 2. bifurkacijske točke sistema. Pri višjih vrednostih Rayleighovega števila se periodičnost izgubi ob nastopu turbulentnega tokovnega režima.

Izračunane časovno in krajevne povprečene vrednosti Nusseltovega števila so bile primerjane z rezultati, ki so jih objavili Kulacki in Goldstein [16], Steinberner in Reineke [20], Nourgaliev in sodelavci [25] in Wörner in sodelavci [54]. Rezultati prikazujejo prenos toplote na stenah kotanje kot funkcijsko odvisnost Rayleighovega števila in omogočajo oceno povprečne višine Nusseltovega števila in s tem višine prenosa toplote skozi posamezne stene kotanje pri znanem Rayleighovem številu. Povprečen prenos toplote je najvišji na zgornji steni simuliranega območja. V primeru težke nesreče je to področje, ki se odpira v poškodovano sredico reaktorja. Tako je bilo ocenjeno, da zaradi naravne konvekcije 48 odstotkov toplotne energije obremenjuje stene spodnjega plenuma, ostanek pa se vrača nazaj v reaktorsko posodo.

Poleg tega izračunane časovno in krajevno povprečene vrednosti Nusseltovega števila kažejo, da odvisnost Rayleighovega in Nusseltovega števila ni enakomerno linearna v \log_{10} - \log_{10} diagramu, kot je vsesplošno sprejeto, ampak odraža spremembe tokovnega režima. Izračuni nadalje kažejo, da je oblika funkcijske odvisnosti Rayleighovega in Nusseltovega števila prav tako različna na posameznih stenah simulacijskega območja.

6. Literatura

- [1] US Nuclear Regulatory Commission, *Code of Federal Regulations*, 1994, Vol. 10, str. 664.
- [2] US Nuclear Regulatory Commission, GL 88-20, *Individual Plant Examination for Severe Accident Vulnerabilities*, 1994, Vol. 10, 50.54(f).
- [3] WENX/95/25 Krško Individual Plant Examination Level 2, Westinghouse, 1995.
- [4] Yamano, N., Maruyama, Y., Moriyama, K., Park, H.S., Sugimoto, J., *Consideration of Molten Core Coolability in Containment from a Viewpoint of Severe Accident Management*, Procs. of the 5th Int. Topical Meeting in Nuclear Thermal Hydraulics, Operations and Safety (NUTHOS-5), W21-W26, Peking, Kitajska, 1997.
- [5] Akers, D.W., McCardell, R.K., *Core Materials Inventory and Behavior*, Nuclear Technology, Vol. 87, 1989, str. 214-223.
- [6] Hobbins, R.R., Petti, D.A., Osetek, D.J., *Review of Experimental Results on Light Water Reactor Core Melt Progression*, Nuclear Technology, Vol. 95, 1991, str. 287-307.
- [7] Henry, R.E., Suh, K.Y., *Integral Analysis of Debris Material and Heat Transport in Reactor Vessel Lower Plenum*, Nuclear Engineering and Design 151, 1994, str. 203-221.
- [8] Sich, A.R., *Chernobyl Accident Management Actions*, Nuclear Safety, Vol. 35, No. 1, 1994, str. 1-24.
- [9] Henry, R.E., Fauske, H.K., *External Cooling of a Reactor Vessel under Severe Accident Conditions*, Nuclear Engineering and Design, 139, 1993, str. 31-43.
- [10] Theofanous, T.G., Syri, S., Salmassi, T., *Critical Heat Flux Through Curved, Downward Facing, Thick Walls*, Procs. of OECD/CSNI/NEA Workshop on Large Molten Pool Heat Transfer, G2-G14, Grenoble, France, March 9-11, 1994.
- [11] Theofanous, T.G., Liu, C., Angelini, S., Kymäläinen, O., Tuomisto, H., Additon, S., *Experience from the First Two Integrated Approaches to In-Vessel Retention Through External Cooling*, Procs. of OECD/CSNI/NEA Workshop on Large Molten Pool Heat Transfer, H1-H33, Grenoble, France, March 9-11, 1994.
- [12] Henry, R.E., Suh, K.Y., *Integral Analysis of Debris Material and Heat Transport in Reactor Vessel Lower Plenum*, Nuclear Engineering and Design, 151, 1994, str. 203-221.

- [13] Parozzi, F., Fioravanti, D., Locatelli, S., Lombardi, C., Magallon, D., *Corium Debris Coolability within the RPV or Confinement Structures*, Procs. of International Conference on New Trends in Nuclear Thermohydraulics, Thermohydraulics of Containment and Severe Accidents, Volume II, str. 565-574, Pisa Italy, 1994.
- [14] Theofanous, T. G., Liu, C., Addition, S., Angelini, S., Kymäläinen, O., Salmassi, T., *In-Vessel Coolability and Retention of a Core Melt*, Nuclear Engineering and Design, Vol. 169, 1997, str. 1-48.
- [15] Horvat, A., *Modeliranje naravne konvekcije v talini sredice jedrskega reaktorja*, Magistrsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 1998.
- [16] Kulacki, F.A., Goldstein, R.J., *Thermal Convection in a Horizontal Fluid Layer with Uniform Volumetric Energy Sources*, J. Fluid. Mech. 55, 1972, str. 271-287.
- [17] Kulacki, F.A., Nagle, M.E., *Natural Convection in a Horizontal Fluid Layer with Volumetric Energy Sources*, J. Heat Transfer, 97, 1975, str. 204-211.
- [18] Kulacki, F.A., Emara, A.A., *High Reynolds Number Convection in Enclosed Fluid Layers with Internal Heat Sources*, US NRC Report NUREG-75/065, 1975.
- [19] Jahn, M., Reineke, H.H., *Free Convection Heat Transfer with Internal Heat Sources: Calculations and Measurements*, Procs of the 5th Int. Heat Transfer Conf., Vol. 3, NC-2.8, Tokyo, Japan, 1974.
- [20] Steinberner, U., Reineke, H.H., *Turbulent Buoyancy Convection Heat Transfer with Internal Heat Sources*, Procs of the 6th Int. Heat Transfer Conf., Vol. 2, str. 305-310, Toronto, Canada, 1978.
- [21] Mayinger, F., Jahn, M., Reineke, H.H., Steinbrenner, V., *Examination of Thermohydraulic Processes and Heat Transfer in a Core Melt*, BMFT RS 48/1, 1976, Institute fuer Verfahrenstechnik der T.U., Hannover, Germany.
- [22] Asfia, F.J., Frantz, B., Dhir, V.K., *Experimental Investigation of Natural Convection Heat Transfer in Volumetrically Heated Spherical Segments*, J. Heat Transfer, 118, 1996, str. 31-37.
- [23] Frantz, B., Dhir, V.K., *Experimental Investigation of Natural Convection Heat Transfer in Spherical Segments of Volumetrically Heated Pools*, Procs. of National Heat Transfer Conf., Vol. 192, str. 69-72, San Diego, California, 1992.
- [24] Abalin, S.S., Asmolov, V.G., Daragan, V.D., D'yakov, E.K., Merzlyakov, A.V., Vishnevsky, V.Y., *Kinematic Viscosity Measurements of C-100 and C-22 Corium*, OECD RASPLAV project, 1996, RP-TR-18.
- [25] Nourgaliev, R.R., Dinh, T.N., Sengal, B.R., *Effect of Fluid Prandtl Number on Heat Transfer Characteristics in Internally Heated Liquid Pools with Rayleigh Numbers up to 10^{12}* , Nucl. Eng. Design, Vol. 169, 1997, str. 165-184.

- [26] Verzicco, R., Camussi, R., *Prandtl Number Effects in Convective Turbulence*, J. Fluid Mech., 383, 1999, str. 55-73.
- [27] Dinh, T.N., Nourgaliev, R.R., *Turbulence Modeling for Large Volumetrically Heated Liquid Pools*, Nucl. Eng. Design 169, 1997, str. 131-150.
- [28] Kymäläinen, O., Tuomisto, H., Hongisto, O., Theofanous, T.G., *Heat Flux Distribution from Volumetrically Heated Pool with High Rayleigh Number*, Procs. of the 6th Int. Topical Meeting on Nucl. Reactor Therm. Hydraulics, NURETH-9, 1993, Grenoble, France, str. 47-53.
- [29] Shengal, B.R., Dinh, T.N., Nourgaliev, R.R., Kolb, G., Karbojian, A., Bui, V.A., *Research at RIT on Thermal Loading on, and Mechanical Response of, a Reactor Vessel during Severe Accident*, Cooperative Severe Accident Research Program CSARP'98 "Lower head integrity", USA, 1998.
- [30] Decker, W.J., *Numerical Studies of Bifurcations and Chaos in Natural Convection*, Ph. D. Thesis, University of Virginia, 1996, str. 156.
- [31] Wilcox, D.C., *Turbulence Modeling for CFD*, SCW Industries, Inc., La Cañada, California, USA, 1994, str. 4.
- [32] Hinze, J.O., *Turbulence*, 2. izdaja, McGraw-Hill Book Company, 1975, str. 6.
- [33] Pope, S.B., 2000, *Turbulent Flows*, Cambridge Univ. Press, str. 601
- [34] Arpaci, V.S., *Buoyant Turbulent Flow Driven by Internal Energy Generation*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 38, No. 15, 1995, str. 2761-2770.
- [35] Arpaci, V.S., *Microscales of Natural Convection*, HTD-Vol. 353, Procs. of the ASME HTD, Vol. 3, Dallas, Texas, USA, 1997.
- [36] Hinze, J. O., *Turbulence*, 2. izdaja, McGraw-Hill Book Company, 1975, str. 321-357.
- [37] Tennekes, H., Lumley, O.L., *A First Course in Turbulence*, 17. izdaja, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1972, str. 64.
- [38] Tennekes, H., Lumley, O.L., *A First Course in Turbulence*, 17. izdaja, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, USA, 1972, str. 97.
- [39] Abbott, M.B., Basco, D.R., *Computational Fluid Dynamics, An Introduction for Engineers*, Longman House, Burnt Mill, Harlow, 1989, str. 303-381.
- [40] Madabhushi, R.K., Vanka, S.P., *Large-Eddy Simulation of Turbulence-Driven Secondary Flow in a Square Duct*, Phys. Fluids A, 1991, 3 (11), str. 2734-2745.
- [41] Hinze, J. O., *Turbulence*, 2. izdaja, McGraw-Hill Book Company, 1975, str. 283.

- [42] Eidson, T., *Numerical Simulation of the Turbulent Rayleigh-Bénard Problem Using Subgrid Modelling*, J. Fluid. Mech., 1985, vol. 158, str. 245-268.
- [43] Wong, V.C., Lilly, D.K., *A Comparison of Two Dynamic Subgrid Closure Methods for Turbulent Thermal Convection*, Phys. Fluids, 1994, 6, str. 1016-1023.
- [44] Bastiaans, R.J.M., Rindt, C.C.M., Nieuwstadt, F.T.M., van Steenhoven, A.A., *Direct and Large-Eddy Simulation of the Transition of Two- and Three-Dimensional Plane Plumes in a Confined Enclosure*, Int. J. Heat and Mass Trans., 2000, 43, str. 2375-2393.
- [45] Germano, M., *Turbulence: the Filtering Approach*, J. Fluid Mech., 1992, Vol. 238, str. 325-336.
- [46] Deardorff, W.P., *A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers*, J. Fluid Mech., 1970, Vol. 41, str. 453-480.
- [47] Nieuwstadt, F. T. M., *Direct and Large-Eddy Simulation of Free Convection*, 9th International Heat Transfer Conference, Jeruzalem, Izrael, 1990, Procs, str. 37-47.
- [48] Piomelli, U., *High Reynolds Number Calculations Using the Dynamic Subgrid-Scale Stress Model*, Phys. Fluids A, 1993, 5 (6), str. 1484-1490.
- [49] Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., Cabot, W.H., *A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model*, Phys. Fluids A, 1992, 4 (3), str. 633-635.
- [50] Lilly, D.K., *A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Method*, Phys. Fluids A, 1991, 3 (7), str. 1760-1765.
- [51] Peng, S.-H., Davidson, L., *Comparison of Subgrid-Scale Models in LES for Turbulent Convection Flow With Heat Transfer*, The 2nd Turbulent Heat Transfer Conf., Manchester, UK, 1998, Proceedings, Vol. 1, str. 5.25-5.35.
- [52] Asfia, F.J., Dhir, V.K., *An Experimental Study of Natural Convection in a Volumetrically Heated Spherical Pool Bounded on the Top with Rigid Wall*, Nucl. Eng. Design, 1996, 163, str. 333-348.
- [53] Horvat, A., Kljenak, I., *Numerical Investigation of Turbulent Natural Convection in Reactor Pressure Vessel Lower Plenum during Core Meltdown Scenario*, The 4th Regional Meeting "Nuclear Energy in Central Europe", Bled, Slovenija, Sept. 7-10, 1997, Proceedings, Nuclear Society of Slovenia, 1997, str. 43-50.
- [54] Wörner, M., Schmidt, M., Grötzbach, G., *Direct Numerical Simulation of Turbulence in an Internally Heated Convective Fluid Layer and Implications for Statistical Modelling*, Journal of Hydraulic Research, 35, 1997, str. 773-798.
- [55] Suh, K. Y., Henry, R. E., *Debris Interactions in Reactor Vessel Lower Plena During a Severe Accident II. Integral Analysis*, Nuclear Science and Engineering, 1996, Vol. 116, str. 165-178.

- [56] Grötzbach, G., *Direct Numerical Simulation of Laminar and Turbulent Bénard Convection*, J. Fluid Mech., 1982, Vol. 119, str. 27-53.
- [57] Horvat, A., Kljenak, I., Marn, J., *Numerical Prediction of Cooling Margins for a Fluid with Internal Heat Generation*, 5th Int. Conference on Advanced Computational Methods in Heat Transfer "Heat Transfer '98", Krakov, Poljska, Junij 17-19, 1998, Proceedings, str. 337-346.
- [58] Gabor, J. D., Ellison, P. G., Cassulo, J. C., *Heat Transfer from Internally Heated Hemispherical Pools*, 19th National Heat Transfer Conference, Orlando, Florida, 1980, Proceedings.
- [59] Fletcher, C. A. J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 1989, Vol. 2, str. 333-338.
- [60] Versteeg, H. K., Malalasekera, W., *An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*, Longman Scientific & Technical, 1995, Velika Britanija.
- [61] LeVeque, R., *High-Resolution Finite Volume Method on Arbitrary Grids via Wave Propagation*, J. Comp. Phys., 1988, 78, str. 36-63.
- [62] Hindmarsh, A.C., Gresho, P.M., Griffiths, D.F., *The Stability of Explicit Euler Time Integration for Certain Finite Difference Approximations of the Multidimensional Advection-Diffusion Equation*, Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, 1984, 4, str. 853-897.
- [63] Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1, 1988, Wiley, New York, ZDA, str. 422-504.
- [64] Press, W.H. , Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, 2. izdaja, 1977, Cambridge University Press, Cambridge, Massachusetts, ZDA, str. 877.
- [65] Fletcher, C.A.J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vol. 2, 1988, Springer-Verlag, Berlin, str. 340.
- [66] Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1, Wiley & Sons, New York, USA, 1988, str. 267-282.
- [67] Leong, W.H., Hollands, K.G.T., Brunger, A.P., *On a Physical-Realizable Benchmark Problem in Internal Natural Convection*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 41, 1998, str. 3817-3828.
- [68] Leong, W.H., Hollands, K.G.T., Brunger, A.P., *Experimental Nusselt Numbers for a Cubical Cavity Benchmark Problem in Natural Convection*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 42, 1999, str. 1979-1989.
- [69] Freitas, C.J., *Perspective: Selected Benchmarks from Commercial CFD Codes*, ASME J. Fluid Eng., vol. 117, 1995, str. 208-218.

- [70] Rodi, W., Ferziger, J.H., Breuer, M., Pourquié, M., *Status of Large Eddy Simulation: Results of Workshop*, ASME J. Fluid Eng., vol. 119, 1997, str. 248-262.
- [71] Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, T., *High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*, J. Comp. Phys., 48, 1982, str. 387-411.
- [72] Hanjalić, K., Kenjereš, S., Durst, F., *Natural Convection in Partitioned Two-Dimensional Enclosures at Higher Rayleigh Numbers*, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 39, No. 7, 1996, str. 1407-1427.
- [73] Rahman, M.M., Miettinen, A., Siikonen, T., *Modified Simple Formulation on a Collocated Grid with an Assessment of the Simplified QUICK Scheme*, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 30, 1996, str. 291-314.
- [74] Janssen, R.J.A., Henkes, R.A.W.M., *Accuracy of Finite-Volume Discretizations for the Bifurcating Natural Convection Flow in a Square Cavity*, Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 24, 1993, str. 191-207.
- [75] Chu, T.Y., Goldstein, R.J., *Turbulent Convection in a Horizontal Layer of Water*, J. Fluid Mech., 60, 1973, str. 141-159.
- [76] Wörner, M., Schmidt, M., Grötzbach, G., *DNS Database of Turbulent Natural Convection in Horizontal Fluid Layers*, Institut für Reaktorsicherheit, Forschung Zentrum Karlsruhe, <http://hikwww4.fzk.de/irs/irs3>.
- [77] Horvat, A., Kljenak, I., Marn, J., *Two-Dimensional Large Eddy Simulation of Time Dependent Turbulent Natural Convection due to Internal Heat Generation*, Int. J. Heat Mass Transfer, sprejeto.
- [78] Horvat, A., Kljenak, I., Marn, J., *Numerical Estimation of Reactor Core Melt Cooling*, Transactions of the American Nuclear Society, La Grange Park, Illinois, USA, American Nuclear Society, Vol.: 79, ISSN: 0003-018X, 1998, str. 380-381.
- [79] Horvat, A., Kljenak, I., Marn, J., *Dynamic Behavior of the Melt Pool at Severe Accident Conditions*, The 1999 NURETH-9 Conference, Okt. 3-8, 1999, San Francisco, Proceedings, (NURETH, 9). La Grange Park: American Nuclear Society, 1999, str. 1-15.
- [80] Horvat, A., Kljenak, I., Marn, J., *Dynamics of Heat Transfer in the Melt Pool at Nuclear Severe Accident Conditions*, The 1999 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Nov. 14-19, 1999, Nashville, Tennessee, Procs of the ASME, HTD, 364, str. 285-292.

Spodaj podpisani Andrej Horvat izjavljam, da disertacija predstavlja rezultate lastnega znanstveno-raziskovalnega dela.